El espacio Topológico $\mathbb{R}^n$

Bolas abiertas, bolas cerradas y esferas.

Sea d una métrica y $\bar{x}_0$ un punto en $\mathbb{R}^n$

(1) La bola abierta con centro en $\bar{x}_0$ y radio $r > 0$, es el conjunto:
$B(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\}$

(2) La bola cerrada con centro $\bar{x}_0$ y radio $r \geq 0$ es el conjunto:
$\bar{B}(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}$

(3) La esfera con centro $\bar{x}_0$ y radio $r \geq 0$ es el conjunto:
$S(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\}$

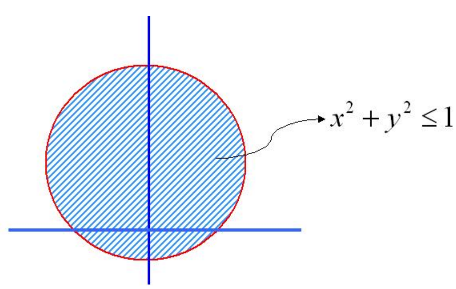
Observemos que para la bola abierta $r > 0$ estrictamente, mientras que la bola cerrada y la esfera pueden tener radio cero. En este último caso ambas se reducen a un punto:

$$\bar{B}(\bar{x}_0, 0) = \{\bar{x}_0\}$$

$$S(\bar{x}_0, 0 = \{\bar{x}_0\})$$

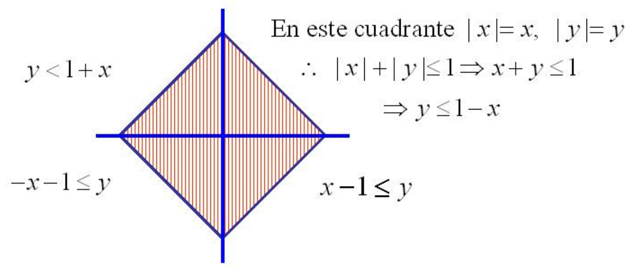
Los conjuntos $B(x_0, r)$, $\bar{B}(x_0, r)$ y $S(\bar{x}_0, r)$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y su aspecto depende de la métrica con la cual se midan las distancias.

Ejemplo: $B_2(0,1) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\|_2 \leq 1\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \ \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

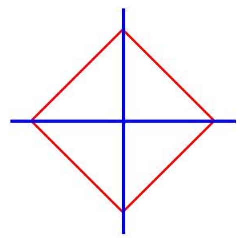


La periferia de este disco es el circulo que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que corresponde a la esfera $S_2(0,1) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\|_2 = 1\}$.

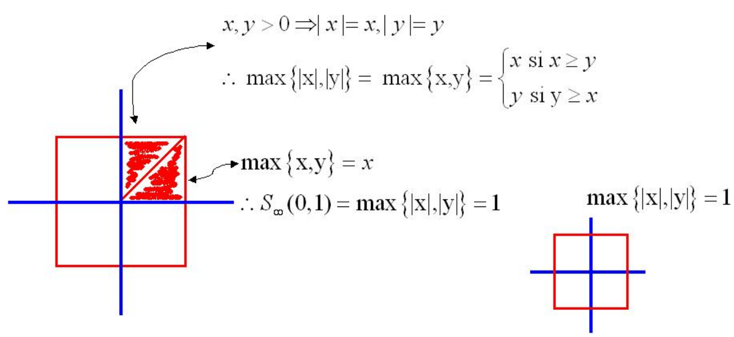
Ejemplo: Sea ahora la bola cerrada $\bar{B}_2(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\| \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$



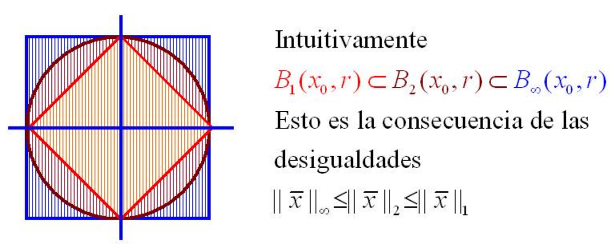
Para $S_1(0,1)=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\|=1\}$



Para $B_\infty(0,1)=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\|_\infty\leq 1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \mathbf{max}\{|x|,|y|\}\leq 1\}$



tenemos entonces que



que en forma explicita se escriben:

$$\mathbf{max}\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Probemos estas desigualdades:

Como $|x_i|^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2$ $\forall i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\mathbf{max}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \;\therefore\; \|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_2$$

Por otra parte dado que

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \;\leq\; (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2$$

entonces

$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \;\leq\; |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\therefore \quad \|\bar{x}\|_2 \leq \|x\|_1$$

Las contenciones tanto para las bolas abiertas, como para las bolas cerradas se siguen de las desigualdades

$$\|\bar{x} - x_0\|_\infty \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_2 \leq \|\bar{x} - x_0\|_1$$

Pues por ejemplo si $\bar{x} \in B_2(\bar{x}_0, r)$ entonces $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|_2 < r$ luego $\|\bar{x} - x_0\|_\infty < \|x - x - 0\| < r$

$\therefore \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_\infty < r$ es decir $x \subset B_\infty(x_0, r) \therefore B_2(\bar{x}_0, r) \subset B_\infty(\bar{x}_0, r)$

Si $x \in B_1(\bar{x}_0, r)$ entonces $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|_1 < r$ luego $\|x - \bar{x}_0\|_2 \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_1 < r \therefore \|x - \bar{x}_0\|_2 < r$

$\therefore x \in B_2(x_0, r) \therefore B_1(\bar{x}_0, r) \subset B_2(x_0, r)$

Para las esferas

$$S_1 \subseteq B_2(\bar{x}_0, r) \subset B_{\infty(\bar{x}_0, r)}$$

$$S_2 \subseteq B_\infty(\bar{x}_0, r)$$

$$S_\infty \subseteq B_\infty(\bar{x}_0, r)$$

Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados

Definición. Un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es abierto si para cada $\bar{x} \in V$ existe una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida en V. Es decir si para cada $\bar{x} \in V$ existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \subset V$.