Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados

Definición. Un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es abierto si para cada $\bar{x} \in V$ existe una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida en V. Es decir si para cada $\bar{x} \in V$ existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \subset V$.

Definición. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es cerrado si su complemento $F^c = \mathbb{R}^n - F$ es un conjunto abierto.

Ejemplo: El espacio $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, pues dado cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ esta contenida en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Mostraremos que el $\emptyset$ es abierto.

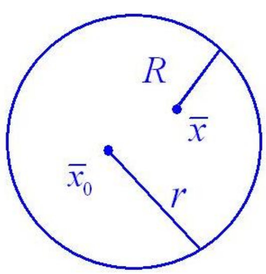
Demostración: Suponemos que el $\emptyset$ no es abierto $\therefore \exists\ x \in \emptyset$ para el cual no es posible hallar una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida en $\emptyset$. Pero esto no es posible ya que el $\emptyset$ no tiene elementos.
Entonces debemos suponer que el $\emptyset$ no es abierto **!** $\therefore \emptyset$ es abierto.

Un conjunto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ no es abierto, si existe un punto $\bar{x}_0 \in X$ tal que no existe bola abierta alguna $B(\bar{x}_0, r)$ contenida en X.
Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ no es abierto, si existe $x_0 \in X$ tal que $\forall\ r > 0\ B(\bar{x}, r) \cap X^c \neq \emptyset$.

Ejemplo: Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son cerrados. En efecto $\mathbb{R}^n$ es cerrado pues su complemento $\emptyset$ es abierto. Similarmente $\emptyset$ es cerrado pues su complemento $\mathbb{R}^n$ es abierto.

Proposición: Toda bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Demostración: Sea $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Mostraremos que $B(\bar{x}_0, r)$ es un conjunto abierto. Debemos probar que para cada $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$, existe una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida a su vez en la bola abierta $B(\bar{x}_0, r)$.
Sea pues $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$ y consideremos $R = r - \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$.
Como $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$ se tiene entonces que $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r \therefore R > 0$. Mostraremos que la bola abierta $B(\bar{x}, R)$ esta contenida en $B(\bar{x}_0, r)$.



Sea entonces $y \in B(\bar{x}, r)$. Por definición se tiene que $\|\bar{y} - \bar{x}\| < R$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \|\bar{y} - \bar{x}_0\| &= \|\bar{y} - \bar{x} + \bar{x} - \bar{x}_0\| \\ &\leq \|\bar{y} - \bar{x}\| + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \\ &< R + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r \end{aligned}$$

esto prueba que $\bar{y} \in B(\bar{x}_0, r)$.

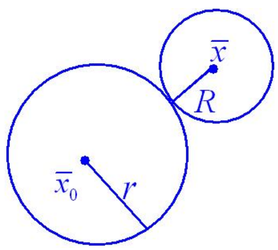
Proposición: Toda bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.

Demostración: Sea $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$. Probaremos que la bola cerrada $\bar{B}(x_0, r)$ es un conjunto cerrado, es decir, que su complemento $\mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

Sea pues $\bar{x} \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$. Mostraremos que existe una bola abierta $B(\bar{x}, R)$ contenida en $\mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$. Como $\bar{x}$ no está en la bola cerrada $\bar{B}(x_0, r)$, se tiene entonces que $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| > r$.

Definamos $R = \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - r > 0$, esto equivale a $r = \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - R$.

Veamos que $B(\bar{x}, R) \subset \mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$



En efecto, sea $y \in B(x, R)$ se tiene entonces $\|\bar{y} - \bar{x}\| < R$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \bar{x}_0\| &= \|\bar{x} - \bar{y} + \bar{y} - \bar{x}_0\| \\ &\leq \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y} - \bar{x}_0\| \\ &< R + \|\bar{y} - \bar{x}_0\| \end{aligned}$$

luego $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < R + \|\bar{y} - \bar{x}_0\| \therefore \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - R < \|\bar{y} - \bar{x}_0\|$, es decir, $r < \|\bar{y} - \bar{x}_0\|$.

Esto significa que $\bar{y} \notin \bar{B}(\bar{x}_0, r)$, es decir, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(\bar{x}_0, R)$.

Proposición: Toda esfera en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.

Demostración: Sea $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$. Mostraremos que la esfera $S(x_0, r)$ es un conjunto cerrado mostrando que su complemento $\mathbb{R}^n - S(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n - S(x_0, r)$, debemos mostrar que existe una bola $B(\bar{x}, R)$ contenida en $\mathbb{R}^n - S(x_0, r)$. Como $\bar{x} \notin S(x_0, r)$ entonces $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \neq r$ tenemos dos casos:

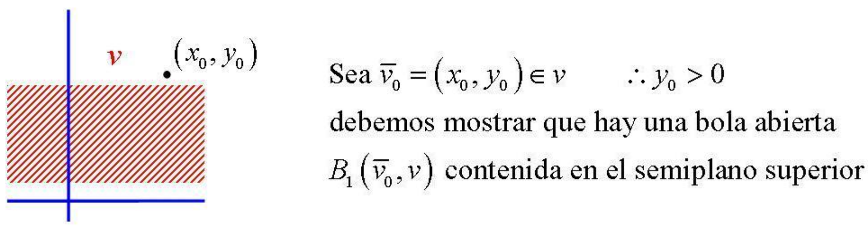
i) $\|x - x_0\| < r$
ii) $\|x - x_0\| > r$

Para el primer caso tenemos que $\bar{x} \in B(x_0, r)$ como esta bola es un conjunto abierto, hay una bola abierta con centro en $\bar{x} B(\bar{x}, R)$ contenida en $B(\bar{x}_0, r)$.
Asi que $\forall\ z \in B(\bar{x}_0, R)$ satisface $\|\bar{z} - \bar{x}\| < r$. Luego $\bar{z}$ no puede ser elemento de la esfera $S(x_0, r)$, es decir, $z \in \mathbb{R}^n - S(x_0, r)$.

Para el segundo caso la desigualdad significa que $\bar{x}$ esta en el complemento de la bola cerrada $\bar{B}(\bar{x}_0, r)$ y como esta bola es un conjunto cerrado entonces su complemento es abierto $\therefore \exists$ una bola abierta $B(\bar{x}, R)$ contenida en $\mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$.
Los elementos z de $B(\bar{x}, R)$ no estan en la bola cerrada $\bar{B}(\bar{x}_0, r)$, es decir, todo elemento z de la bola $B(\bar{x}, R)$ satisfacen $\|\bar{z} - \bar{x}\| > r$.
Esto quiere decir $B(\bar{x}, R) \subset \mathbb{R}^n - S(x_0, r)$.

Ejemplo : Un conjunto con un solo punto $\{\bar{0}\}$ es cerrado ya que $\mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$ es abierto.

Ejemplo: Mostraremos que en $\mathbb{R}^2$, el semiplano superior $v = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$, es un conjunto abierto respecto a la norma $\| \|_1$



Sea $v = y_0$ y consideremos la bola $B_1(\bar{v}_0, y_0)$ y sea $\bar{v} = (x, y) \in B_1(\bar{v}_0, y_0)$ se tiene que $\|\bar{v} - v_0\|_1 < y_0$, es decir, $|x - x_0| + |y - y_0| < y_0$.

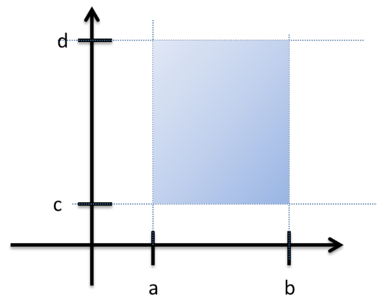
Debemos probar que $y > 0$

(1) y no puede ser cero pues si $y = 0$ $|x - x_0| + |y - y_0| < y_0 \Rightarrow |x - x_0| + |y_0| < y_0$ **!**

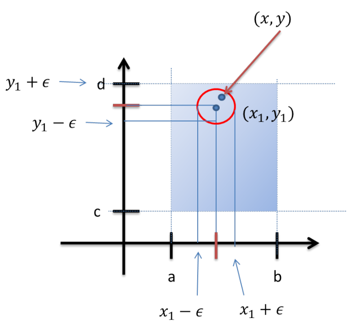
(2) y no puede ser negativa pues $|x - x_0| + |y - y_0| = |x - x_0| + \underbrace{|y| + |y_0|}_{*} < y_0$ **!**

* $y < y_0 \Rightarrow |y - y_0| = -y + y_0 = |y| + |y_0| \therefore y$ tiene que ser $y > 0 \therefore B_1(\bar{v}_0, y_0)$ esta en el semiplano superior.

Ejemplo Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\ ,\ c < y < d\}$. Demuestre que V es un conjunto abierto



Demostración



Sea $X = (x_1, y_1) \in V$ entonces $a < x_1 < b$ y $c < y_1 < d$. Definimos $\epsilon = min\{x_1 - a, b - x_1, y_1 - c, d - y_1\}$ por tanto si $(x, y) \in B(X, \epsilon)$ debe ocurrir

$$a < x_1 - \epsilon < x < x_1 + \epsilon < b \quad y \quad c < y_1 - \epsilon < y < y_1 + \epsilon < d$$

por lo tanto

$$(x, y) \in V \ \therefore\ B(X, \epsilon) \subset V$$

y en consecuencia V es un conjunto abierto

Puntos Interiores, Exteriores y Frontera

(1) Un elemento $\bar{a} \in A$ se dice que es un punto interior de A, si existe una bola abierta con centro en $\bar{a}$ contenida en A es decir si $\exists\ r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset A$.
Al conjunto de puntos interiores de A se le denomina interior de A y se le denota por cualquiera de los simbolos $\overset{o}{A}$, A^o, $\mathbf{int}(A)$.

(2) Un elemento $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto exterior de A si existe una bola abierta con centro $\bar{a}$ contenida en A^c es decir si $\exists\ r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset A^c$.
Al conjunto de puntos exteriores de A se le denomina exterior de A y se le denota por $\mathbf{ext}(A)$.

(3) Un elemento $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto frontera de A si para toda bola abierta con centro $\bar{a}$ se tiene $\forall\ r > 0$ $B(\bar{a}, r) \bigcap A^c \neq \emptyset$ y $B(\bar{a}, r) \bigcap A \neq \emptyset$.
Al conjunto de puntos frontera de A se le denomina frontera de A y se le denota por $\mathbf{Fr}(A)$.

(4) Un elemento $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto adherente de A si toda bola abierta con centro $\bar{a}$ tiene puntos de A.
Al conjunto de puntos adherentes de A se le denomina adherencia (o cerradura de A) y se le denota por cualquiera de los simbolos $\bar{A}$, A^-, $\mathbf{adh}A$.

Proposición: Para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^n$

(1) A^o es un conjunto abierto.

Demostración: Sea $\bar{x} \in A^o$. Por definición $\exists\ B(\bar{x}, r) \subset A$ como la bola es un conjunto abierto, $B(\bar{x}, r) \subset A^o$.
$\therefore A^o$ es un conjunto abierto.

(2) $\bar{A}$ es un conjunto cerrado.

Demostración: Mostraremos que $\bar{A}^c$ es un conjunto abierto. Sea $\bar{x} \in \bar{A}^c$ como $\bar{x}$ no es punto adherente de A, existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \cap A = \emptyset$ es decir $A \subset [B(\bar{x}, r)]^c$, como $[B(\bar{x}, r)]^c$ es un conjunto cerrado $\bar{A} \subset [B(\bar{x}, r)]^c$.

(2) FrA es un conjunto cerrado.

Demostración: Mostraremos que $(FrA)^c$ es un conjunto abierto. Si $x \notin\ Fr(A)$ entonces $x \in\ int(A)$ o $x \in\ ext(A)$ en ambos casos $\exists\ r > 0$ tal que $B(x, r) \subset\ int(A)$ o $B(x, r) \subset\ ext(A) \therefore\ (FrA)^c$ es abierto $\therefore\ Fr(A)$ es cerrado