Puntos Interiores y Cerradura de un Conjunto

Proposición: Para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ se tiene:

(1) $int(A) \subset A$

Demostración: Si $\bar{a} \in int(A)$ $\exists$ $r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset A$ $\therefore$ $int(A) \subset A$

(2) $A \subset \bar{A}$

Demostración: Si $\bar{a} \in A$ $\forall$ $B(\bar{a}, r)$ se tiene que $B(\bar{a}, r) \cap A \neq \emptyset$ $\therefore$ $A \subset \bar{A}$

Lema: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$

(1) Si $v \subset A$ y v es abierto entonces $v \subset A^o$

Demostración: Sea $\bar{x} \in v$, como v es abierto $\exists$ $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \subset v$ y como $v \subset A$ entonces $B(\bar{x}, r) \subset A$ esto significa que $\bar{x}$ es un punto interior de A es decir $\bar{x} \in A$.

(2) Si $A \subset F \subset \mathbb{R}^n$ y F es cerrado, entonces $\bar{A} \subset F$

Demostración: Para probar que $\bar{A} \subset F$ mostraremos que el complemento de F, F^c está contenido en el complemento de $\bar{A}^c$ de $\bar{A}$. Sea $\bar{x} \in F^c$ como F es cerrado F^c es abierto, luego $\exists$ $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \subset F^c$ pero $A \subset F$
$\therefore$ $F^c \subset A^c$ de donde $B(\bar{x}, r) \subset A^c$ o sea $B(\bar{x}, r) \cap A = \emptyset$ esto significa que $\bar{x}$ no es punto adherente de A es decir $\bar{x} \notin \bar{A}$ asi que $\bar{x} \in \bar{A}^c$.

Punto de Acumulación

Sea A un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\overline{x} \in \mathbb{R}^\ltimes$ es un ***punto de acumulación*** de A, si toda bola abierta con centro en $\overline{x}$ contiene un punto de A distinto de $\overline{x}$ es decir

$$\forall r > 0 \quad (B(\overline{x}, r) - \{\overline{x}\}) \bigcap A \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos de acumulación de A se le denomina el conjunto derivado de A y se le denota A^a

Ejemplos Sea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} = B((0, 0), 1)$$

Probaremos que el punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

que no pertenece a A, es punto de acumulación de A.
Dado $r > 0$ se tiene que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r+1)}(1, 1)$$

es tal que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{r}{\sqrt{2}(r+1)},\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}\right\| &= \frac{1}{\sqrt{2}(r+1)}\|(1,1)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(r+1)}\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{r+1} \\ &< 1\end{aligned}$$

y por lo tanto pertenece a A
Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}0 < \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{r}{\sqrt{2}(r+1)},\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}\right)\right\| \\ = \left\|\frac{r}{\sqrt{2}(r+1)},\frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}\right\| \\ = \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}\|(1,1)\| \\ = \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}\sqrt{2} \\ = \frac{r}{r+1} \\ < r\end{aligned}$$

de donde concluimos que este punto también pertenece al conjunto

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},r\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

y por lo tanto que

$$\left(B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},r\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\bigcap A \neq$$

es decir, que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

es un punto de acumulación de A

Ejemplo Tenemos

$$\begin{aligned}A=(a,b) \;&\Rightarrow\; A'=[a,b] \\ A=[0,1)-\{2\} \;&\Rightarrow\; A'=[0,1] \\ A=\left\{\frac{1}{k}\mid k\in\mathbb{N}\right\} \;&\Rightarrow\; A'=\{0\}\end{aligned}$$