Punto de Acumulación

Sea A un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\overline{x} \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ es un ***punto de acumulación*** de A, si toda bola abierta con centro en $\overline{x}$ contiene un punto de A distinto de $\overline{x}$ es decir

$$\forall r > 0 \quad (B(\overline{x}, r) - \{\overline{x}\}) \bigcap A \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos de acumulación de A se le denomina el conjunto derivado de A y se le denota A^a

Lema 1. *$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es punto e acumulación de A si y solamente si $\bar{x} \in \overline{A - \{\bar{x}\}}$*

Demostración. Si $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A entonces $\forall\, r > 0 \quad B(\bar{x}, r) - \{\bar{x}\} \cap A \neq \varnothing$ esta expresión es equivalente a

$$B(\bar{x}, r) \cap A - \{\bar{x}\} \neq \varnothing$$

por lo que

$$B(\bar{x}, r) \cap \{\bar{x}\}^c \cap A = [B(\bar{x}, r) \cap \{\bar{x}\}^c] \cap A = B(\bar{x}, r) \cap A - \{\bar{x}\} \neq \varnothing$$

pero esto significa que $\bar{x}$ es un punto de adherencia de $A - \{\bar{x}\}$
$\therefore \quad \bar{x} \in \overline{A - \{\bar{x}\}}$ □

Ejercicio Pruebe que $A' \subset \overline{A}$

Demostración. Sea $x \in A'$ se tiene entonces

$$x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A - \{\bar{x}\}} \underbrace{\Rightarrow}_{\overline{A - \{\bar{x}\}} \subset \overline{A}} x \in \overline{A}$$

por lo tanto $A' \subset \overline{A}$ □

Ejercicio Pruebe que $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

Demostración. Sea $x \in A'$ se tiene entonces

$$x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A - \{x\}} \underbrace{\Rightarrow}_{\overline{A - \{x\}} \subset \overline{B - \{x\}}} x \in \overline{B - \{x\}} \Rightarrow x \in B'$$

por lo tanto $A' \subset B'$ □

Proposición 1. *Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A, entonces toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contiene una infinidad de puntos de A.*

Demostración. Sea $B(\bar{x}, r)$ una bola abierta arbitraria con centro $\bar{x}$, supongase que esta bola tuviese solamente un número finito de puntos de A, digamos $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ cada uno distinto de $\bar{x}$ elijamos $r_0 = \min\{d(\bar{x}, \bar{x}_1), \ldots, d(\bar{x}, \bar{x}_k)\} \therefore \quad d(\bar{x}, \bar{x}_i) \leq r$.
Consideremos ahora la bola abierta $B(\bar{x}, r_0)$. Es claro que $B(\bar{x}, r_0) \subset B(\bar{x}, r)$ y de la desigualdad se sigue que $B(\bar{x}, r_0)$ no contiene puntos de A distintos de $\bar{x}$ pues todo punto de A que estubiese en $B(\bar{x}, r_0)$ tambien seria elemenro de $B(\bar{x}, r)$ lo cual no es posible ya que $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ son los únicos elementos de A que estan en $B(\bar{x}, r)$. Entonces la bola abierta $B(\bar{x}, r_0)$ no tiene puntos de A diferentes de $\bar{x}$, esto contradice la hipotesis de que $\bar{x}$ es punto de acumulación. □

Teorema 1. *Un conjunto A es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Demostración. Sea $\bar{x}$ un punto de acumulación de A. si $\bar{x} \notin A$, el conjunto abieto A^c es una vecindad de $\bar{x}$, que debe contener cuando menos un punto de A, pero esto no es posible, por lo tanto se concluye $x \in A$.

Inversamente: Si A contiene a todos sus puntos de acumulación se habra de probar que A^c es abierto.
Sea $y \in A^c$ entonces y no es punto de acumulación de A. Por lo tanto, existe una vecindad r de y tal que $A \cap v = \varnothing$.
En consecuencia $v_y \subset A^c$. Dado que esto es valido $\quad \forall\, y \in A^c$ se deduce que A^c es abierto
$\therefore$ A es cerrado. □

Ejercicio Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$(A \bigcup B)' = A' \bigcup B'$$

Demostración. Tenemos que

$$x \in (A \bigcup B)' \;\Rightarrow\; x \in \overline{A \bigcup B} - \{x\}$$

$$\Rightarrow\; x \in \overline{A - \{x\}} \bigcup \overline{B - \{x\}}$$

$$\Rightarrow\; x \in \overline{A - \{x\}} \;\; ó \;\; x \in \overline{B - \{x\}}$$

$$\Rightarrow\; x \in A' \;\; ó \;\; x \in B'$$

$$\Rightarrow\; x \in A' \bigcup B'$$

Inversamente

$$A \subset A \bigcup B \;\Rightarrow\; A' \subset (A \bigcup B)'$$

$$B \subset A \bigcup B \;\Rightarrow\; B' \subset (A \bigcup B)'$$

de lo anterior se tiene

$$A' \bigcup B' \subset (A \bigcup B)'$$

□

Ejercicio Pruebe que $(A \bigcap B)' \subset A' \bigcap B'$

Demostración.

$$A \bigcap B \;\subset\; A \;\Rightarrow\; (A \bigcap B)' \subset A'$$

$$A \bigcap B \;\subset\; B \;\Rightarrow\; (A \bigcap B)' \subset B'$$

de lo anterior se tiene

$$(A \bigcup B)' \subset A' \bigcup B'$$

□