Conjuntos Convexos

Definición 1. *Dados $\overline{x},\ \overline{y}\ \in \mathbb{R}^n$, al segmento rectilineo que une dichos puntos lo denotamos*

$$[\overline{x},\overline{y}] = \{t\overline{y} + (1-t)\overline{x} \mid t \in [0,1]\}$$

Definición 2. *Sea $k \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que k es convexo si dados dos puntos de k, el segmento que los une está contenido en k es decir*

$$[\overline{x},\overline{y}] \subset k \qquad \forall\ \overline{x},\ \overline{y} \in k$$

Ejemplo Una bola abierta es un conjunto convexo

Demostración. Sea $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $\overline{x},\ \overline{y}\ \in\ B(\overline{x}_0,\epsilon)$ vamos a ver que $[\overline{x},\overline{y}] \in\ B(\overline{x}_0,\epsilon)$ tenemos que

$$\overline{x} \in B(\overline{x}_0,\epsilon)\ \Rightarrow\ \|\overline{x}-\overline{x}_0\| < \epsilon\ \ y\ \ \overline{y} \in B(\overline{x}_0,\epsilon)\ \Rightarrow\ \|\overline{y}-\overline{x}_0\| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\|[\overline{x},\overline{y}]-\overline{x}_0\| = \|t\overline{y}+(1-t)\overline{x}-\overline{x}_0\| = \|t(\overline{y}-\overline{x}_0)+(1-t)(\overline{x}-\overline{x}_0)\| \leq t\|\overline{y}-\overline{x}_0\|+(1-t)\|\overline{x}-\overline{x}_0\| <$$

$$t\epsilon + (1-t)\epsilon = \epsilon \quad \therefore \quad \|[\overline{x},\overline{y}]-\overline{x}_0\| < \epsilon$$

y de esta manera

$$[\overline{x},\overline{y}] \in\ B(\overline{x}_0,\epsilon)$$

□

Ejemplo El cuadrado $A = [-1,1] \times [-1,1]$ es un conjunto convexo

Demostración. Sean $\overline{x} = (x_1,x_2)$, $\overline{y} = (y_1,y_2) \in A$ y $t \in [0,1]$ vamos a ver que $t\overline{y}+(1-t)\overline{x} \in A$ tenemos que

$$t\overline{y}+(1-t)\overline{x} = (ty_1,ty_2)+((1-t)x_1,(1-t)x_2) = (ty_1+(1-t)x_1, ty_2+(1-t)x_2)$$

como $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ son tal que

$$-1 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \quad -1 \leq y_1 \leq 1, \quad -1 \leq y_2 \leq 1$$

entonces

$$-1 \leq t(-1)+(1-t)(-1) \leq ty_1+(1-t)x_1 \leq t(1)+(1-t)(1) \leq 1$$
$$1 \leq t(-1)+(1-t)(-1) \leq ty_2+(1-t)x_2 \leq t(1)+(1-t)(1) \leq 1$$

por lo que

$$(ty_1+(1-t)x_1, ty_2+(1-t)x_2) \in [-1,1]\times[-1,1]$$

por lo tanto

$$t\overline{y}+(1-t)\overline{x} \in A$$

□

Teorema 1. *Si* $\overline{x_1}, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in \mathbb{R}^n$ *son conjuntos convexos tales que* $\bigcap \overline{x_i} \neq \emptyset \ \ \forall i = 1, .., n$ *entonces* $\bigcap \overline{x_i}$ *es un conjunto convexo*

Demostración. Sean $\overline{x}, \ \overline{y} \in \bigcap \overline{x_i}$ entonces para todo i se tiene que

$$\overline{x}, \ \overline{y} \in \overline{x}_i$$

como $\overline{x}_i$ es convexo entonces $[\overline{x}, \overline{y}] \in \overline{x}_i$ para todo i, por lo tanto

$$[\overline{x}, \overline{y}] \subset \bigcap \overline{x_i}$$

por lo tanto $\bigcap \overline{x_i}$ es convexo □

Teorema 2. *Un conjunto convexo es conexo*

Demostración. Dado un conjnuto X convexo, si X no fuera conexo entonces existirian A,B conjnutos abiertos separados tales que $X = A \bigcup B$ y $A \bigcap B = \emptyset$ y si consideramos $\overline{x}, \ \overline{y} \in X$ entonces el segmento $[\overline{x}, \overline{y}]$ se puede parametrizar como

$$f(t) = t\overline{y} + (1-t)\overline{x} \quad t \in [0,1]$$

y podríamos construir los abiertos

$$\{t \in [0,1] \mid f(t) \in A\} \quad y \quad \{t \in [0,1] \mid f(t) \in B\}$$

estos abiertos proporcionarían una disconexion para el segmento rectilineo $\underset{\circ}{\bigtriangledown}$ pues ya hemos probado que un segmento rectilineo es conexo, por lo tanto X es conexo □

Ejemplo Un conjunto Conexo no es convexo, considere el conjunto

$$A = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, \ y = 0\}$$

Vamos a mostrar que A es conexo pero no convexo
Dado $(x,y) \in \ A$ tomamos tres casos
Caso (1) y=0 y $x > 0$
Consideremos el segmento

$$[x, x_0] = [(x, x_0), (1,0)]$$

que esta dado por

$$\{(x + t(1-x), 0) = ((1-t)x + t, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1]\}$$

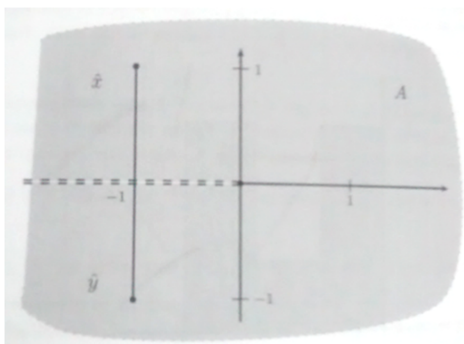
y como $(1-t)x + t > 0$ para todo $t \in [0,1]$. Se tiene que esta contenido en A.
Caso (2) $y > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. En este caso el segmento

$$[x, x_0] = [(x, x_0), (1,0)]$$

que esta dado por

$$\{(x + t(1-x), y - ty) = ((1-t)x + t, (1-t)y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1]\}$$

se tiene que
$$(1-t)y > 0 \ \ \forall \ t \in [0,1)$$
para $t = 1$ se tiene el punto $(1,0) = x_0$, entonces en este caso también dicho segmento esta contenido en A.
Caso (3) $y < 0$ y $x \in \mathbb{R}$. En este caso el segmento
$$[x, x_0] = [(x, x_0), (1,0)]$$
que esta dado por
$$\{(x + t(1-x), y - ty) = ((1-t)x + t, (1-t)y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1]\}$$
se tiene que
$$(1-t)y < 0 \ \ \forall \ t \in [0,1)$$
para $t = 1$ se tiene el punto $(1,0) = x_0$, entonces en este caso también dicho segmento esta contenido en A.
Solo falta ver que el conjnuto A es no es convexo



Si consideramos el punto $x = (-1,1)$ y el punto $y = (-1,-1)$ se tiene que $x, y \in A$ y sin embargo el punto
$$(-1,0) = x + \left(\frac{1}{2}\right)(y - x) \in [x,y]$$
pero no pertenece a A, es decir $[x,y] \not\subset A$