Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 1. *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es cualquier lista infinita de vectores en $\mathbb{R}^n$ $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}, ...$ algunos de los cuales o todos ellos pueden coincidir entre si.*
Dada una sucesión $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}, ...$ se define de manera natural una función de los enteros positivos $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que a cada entero positivo k se le asigna un vector $\overline{x_k} \in \mathbb{R}^n$
A la colección ordenada de los elementos de una sucesión la denotaremos

$$\{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \{\overline{x}_k\}$$

Ejemplo Considerando el espacio $\mathbb{R}^2$ sea la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^{\infty}$ dada por $\overline{x_k} = \left(k, \frac{1}{k}\right)$ cuyos elementos podemos listar como sigue:

$$\left\{(1,1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), ...\right\}$$

Ejemplo Considerando la sucesión $\{\overline{x_k}\} \in \mathbb{R}^n$. Cada vector $\overline{x_k} \in \{\overline{x_k}\}$ esta dado de la siguiente manera:

$$\overline{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{n,k})$$

Es decir, dicho vector define de manera natural n sucesiones en $\mathbb{R}$ $\{\overline{x}\}$, las cuales llamaremos sucesiones componentes o sucesiones proyección, así, la primera sucesión componente del ejemplo anterior es: $\{x_{1,k}\} = k$ y la segunda sucesión proyección del ejemplo anterior es $\{x_{2,k}\} = \frac{1}{k}$

Ejemplo Sea la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^{\infty}$ dada por $\overline{x_k} = \left(\frac{k+1}{k+2}, \frac{1}{2^k}\right)$ cuyas sucesiones componentes son:

$$\overline{x_{1_k}} = \left(\frac{k+1}{k+2}\right) \quad \overline{x_{2_k}} = \left(\frac{1}{2^k}\right)$$

Ejemplo Sea la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^{\infty}$ dada por $\overline{x_k} = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k, \sqrt[k]{k}, \sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)$ cuyas sucesiones componentes son:

$$\overline{x_{1_k}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \quad \overline{x_{2_k}} = \sqrt[k]{k} \quad \overline{x_{3_k}} = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$$

Convergencia de Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 2. *Una sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$ se dice que converge a un vector $\overline{x}$ en $\mathbb{R}^n$ si*

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad N_0 \in \mathbb{N} \quad tal \quad que \quad \|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon \quad \forall k > N_0$$

En este caso diremos que la sucesión es convergente y que $\overline{x}$ es el limite de la sucesión y escribimos

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x_k} = \overline{x}$$

Proposición 1. ***Unicidad del Limite*** *Consideremos una sucesión* $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y sean* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x_k} \quad y \quad \overline{y} = \lim_{k\to\infty} \overline{x_k}$$

entonces $\overline{x} = \overline{y}$

Demostración. Supongamos que $\overline{x} \neq \overline{y}$ y tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}\|\overline{x} - \overline{y}\| > 0$.
Por definición
$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x_k}$ por lo que $\exists N_{0_x} \in \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$ para $k > N_{0_x}$
y analogamente se tiene que
$\overline{y} = \lim_{k\to\infty} \overline{x_k}$ por lo que $\exists N_{0_y} \in \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x_k} - \overline{y}\| < \epsilon$ para $k > N_{0_y}$
Sea ahora $N_0 = máx\{N_{0_x}, N_{0_y}\}$ entonces se cumple simultaneamente que
$\|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$ y $\|\overline{x_k} - \overline{y}\| < \epsilon$ para $k > N_0$ $\therefore$

$$\|\overline{x} - \overline{y}\| = \|\overline{x} - \overline{x_k} + \overline{x_k} - \overline{y}\| \leq \|\overline{x} - \overline{x_k}\| + \|\overline{x_k} - \overline{y}\| < 2\epsilon = 2\left(\frac{1}{2}\|\overline{x} - \overline{y}\|\right) = \|\overline{x} - \overline{y}\| (falso)$$

□

Proposición 2. *Sea* $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ *una sucesión en* $\mathbb{R}^n$ *y sean*

$$\{\overline{x_{1_k}}\}_1^\infty = (x_{1_1}, x_{1_2}, ...)$$
$$\{\overline{x_{2_k}}\}_1^\infty = (x_{2_1}, x_{2_2}, ...)$$
$$\vdots$$
$$\{\overline{x_{n_k}}\}_1^\infty = (x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$$

las sucesiones componentes de la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$*. Entonces la sucesión* $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ *converge a* $\overline{x} = (x_1, x_2, ...)$ *en* $\mathbb{R}^n$ *si y solo si para cada* $j = 1, 2, ...$ *se tiene que* x_{n_j} *converge a* x_j

Demostración. Supóngase que la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ converge a $\overline{x} = (x_1, x_2, ...)$ esto quiere decir que $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$ para $k > N_0$ y dado que

$$0 \leq |x_{j_k} - x_j| \leq \|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$$

entonces se tiene que

$$0 \leq |x_{j_k} - x_j| < \epsilon$$

lo que significa que

$$\lim_{k\to\infty} x_{j_k} = x_j$$

Reciprocamente, supongamos que para cada j

$$\lim_{k\to\infty} x_{j_k} = x_j$$

lo que significa que

$$|x_{j_k} - x_j| < \frac{\epsilon}{n}$$

$$\therefore \quad 0 \leq \|\overline{x_k} - \overline{x}\| \leq |x_{1_k} - x_1| + |x_{2_k} - x_2| + ... + |x_{n_k} - x_n| < \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n} + ... + \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{k\to\infty} \overline{x_{j_k}} = \overline{x}$$

□

Ejemplo Consideremos la sucesión $\overline{x_k} = \left(3 - \frac{1}{k+1}, \frac{1}{3^k}\right)$ tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x_{1_k}} = \lim_{k\to\infty} 3 - \frac{1}{k+1} = 3, \quad \lim_{k\to\infty} \overline{x_{2_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^k} = 0$$

$\therefore \lim_{k\to\infty} \overline{x_k} = (3,0) = \overline{x}$
Ahora para comprobarlo tenemos que

$$\|\overline{x_k} - \overline{x}\| = \left\|\left(3 - \frac{1}{k+1}, \frac{1}{3^k}\right) - (3,0)\right\| = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{k+1} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3^k}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(3^k)^2}} < \sqrt{\frac{1}{k} + \frac{1}{k}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} < \sqrt{k} \quad \therefore \quad N_0 = \frac{2}{\epsilon^2}$$

$$\therefore \quad Si \quad k > N_0 \therefore entonces \quad \left\|\left(3 - \frac{1}{k+1}, \frac{1}{3k}\right) - (3,0)\right\| < \epsilon$$

Ejemplo Consideremos la sucesión $\overline{x_k} = \left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right)$ tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x_{1_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \overline{x_{2_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k}}{\frac{k}{k} + \frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = 1$$

$\therefore \lim_{k\to\infty} \overline{x_k} = (0,1) = \overline{x}$
Ahora para comprobarlo tenemos que

$$\|\overline{x_k} - \overline{x}\| = \left\|\left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right) - (0,1)\right\| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k}{k+1} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} < \sqrt{\frac{2}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{k}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{k} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} < k \quad \therefore \quad N_0 = \frac{\sqrt{2}}{\epsilon}$$

$$\therefore \quad Si \quad k > N_0 \therefore entonces \quad \left\|\left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right) - (0,1)\right\| < \epsilon$$

Definición 3. *Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado si y solo si $\exists M > 0$ tal que $\forall \overline{a} \in A$ se cumple $\|\overline{a}\| \leq M$*

Proposición 3. *Sea $\{\overline{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, si $\{\overline{x}_k\}$ converge entonces $\{\overline{x}_k\}$ es acotada*

Demostración. Si $\{\overline{x}_k\}$ converge entonces $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k,j} = x_j \forall j = 1, ..., n$ por lo tante se tiene $\{x_{k,j}\}$ es acotada y por tanto $\exists M_j > 0$ tal que $|x_{k,j}| \leq M_j \ \forall k \therefore$ se tiene que

$$\|\overline{x}_k\| \leq |x_{1,k}| + |x_{2,k}| + \cdots + |x_{n,k}| \leq n \cdot \max\{x_{k,j}\} = n \cdot M_j = M$$

$\therefore \{\overline{x}_k\}$ es acotada □

Teorema 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $\overline{x}$ es un punto de acumulación de A si y solo si $\exists \{\overline{x}_k\} \in A$ con $\overline{x_k} \neq \overline{x}$ $\forall k$ tal que $\overline{x}_k \to \overline{x}$*

Demostración. $\Rightarrow$ Suponemos que $\overline{x}$ es punto de acumulación de A entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ $\exists$ $\overline{x_k} \in A \cap B(\overline{x}, \frac{1}{k})$ con $\overline{x_k} \neq \overline{x}$ $\therefore$ $\overline{x_k} \to \overline{x}$
$\Leftarrow$ Sea $B(\overline{x}, r)$ como $\overline{x_k} \to \overline{x}$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{x_k} \in B(\overline{x}, r)$ $\forall k > k_0$ $\therefore$ $\exists$ $\overline{x_k} \in A \cap B(\overline{x}, r)$ $\therefore$ $\overline{x}$ es punto de acumulación $\square$

Teorema 2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $\overline{x}$ es un punto de acumulación de A si y solo si $\exists\{\overline{x}_k\} \in A$ con $\overline{x_k} \neq \overline{x}$ $\forall k$ tal que $\overline{x}_k \to \overline{x}$*

Demostración. $\Rightarrow$ Suponemos que $\overline{x}$ es punto de acumulación de A entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ $\exists$ $\overline{x_k} \in A \cap B(\overline{x}, \frac{1}{k})$ con $\overline{x_k} \neq \overline{x}$ $\therefore$ $\overline{x_k} \to \overline{x}$
$\Leftarrow$ Sea $B(\overline{x}, r)$ como $\overline{x_k} \to \overline{x}$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{x_k} \in B(\overline{x}, r)$ $\forall k > k_0$ $\therefore$ $\exists$ $\overline{x_k} \in A \cap B(\overline{x}, r)$ $\therefore$ $\overline{x}$ es punto de acumulación $\square$

Criterio de Convergencia de Cauchy

Definición 4. *Sea $\{\overline{x_k}\}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\{\overline{x_k}\}$ es una sucesión de Cauchy si dado $\epsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x_k} - \overline{x_l}\| < \epsilon$ $\forall k, l \geq N_0$*

Teorema 3. *Una sucesión $\{\overline{x_k}\} \in \mathbb{R}^n$ es convergenta si y solo si cumple el criterio de Cauchy*

Demostración. $\Rightarrow$ Suponemos que $\{\overline{x_k}\} \to \overline{x}$ $\therefore$ $\|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$ $\forall k > N_0$. Se tiene entonces que

$$\|\overline{x_k} - \overline{x_l}\| = \|\overline{x_k} - \overline{x} + \overline{x} - \overline{x_l}\| \leq \|\overline{x_k} - \overline{x}\| + \|\overline{x} - \overline{x_l}\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\forall k, l > N_0$ $\therefore$ $\{\overline{x_k}\}$ cumple la condición de Cauchy
$\Leftarrow$ Supongamos que $\{\overline{x_k}\}$ cumple la condición de Cauchy por tanto se tiene que:

$$\|\overline{x_k} - \overline{x_l}\| < \epsilon \Rightarrow |x_{i,k} - x_{i,l}| < \epsilon \quad \forall i \Rightarrow \{x_{i,k}\} \quad cumple \quad Cauchy$$

$\therefore$ $x_{i,k}$ es convergente $\forall i$ $\therefore$ $\{\overline{x_k}\}$ es convergente $\square$