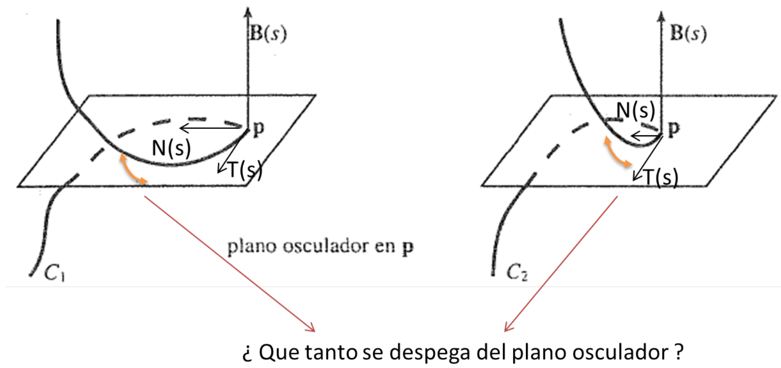
Torsión

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva tres veces diferenciable parametrizada por longitud de arco. Nuestro objetivo consistira en estimar con que rapidez una curva se aleja de su plano osculador



tenemos que

$$\|B\| = 1 \;\Rightarrow\; \frac{d\|B\|^2}{ds} \underbrace{=}_{\|B\|^2 = B\cdot B} 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(B\cdot B)}{ds} = 0 \;\Rightarrow\; B\cdot B' + B'\cdot B = 0 \;\Rightarrow\; B'\cdot B = 0 \;\Rightarrow\; B' \perp B$$

por otro lado

$$B\cdot T = 0 \;\Rightarrow\; (B\cdot T)' = 0 \;\Rightarrow\; B'\cdot T + T'\cdot B = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{T'\cdot B = 0} B'\cdot T = 0 \;\Rightarrow\; B' \perp T$$

De lo anterior podemos concluir que B' tiene la dirección del vector N.

Definición 1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva tres veces diferenciable parametrizada por longitud de arco tal que $f''(s) \neq 0\ \forall\ s \in I$. El número $\tau(s)$ tal que $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ se llama torsión de f en s.*

Ejemplo Dada la función

$$f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$$

cuya reparametrización por longitud de arco es:

$$\overline{f}(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

cuyo vector normal es

$$N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

cuyo vector binormal es

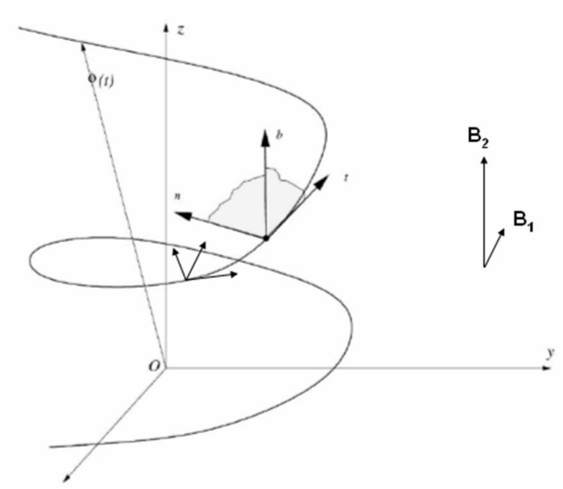
$$B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right)$$

de modo que

$$B'(s) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

y por lo tanto se tiene

$$\tau(s) = \frac{1}{2}$$



En la figura anterior vemos que la torsión representa una variación en la dirección del vector binormal, procederemos ahora a desarrollar una fórmula para calcularla
Tenemos que

$$T(s) = f'(s)$$

ahora bien

$$N(s) = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|}$$

por lo tanto

$$N'(s) = \frac{\|f''(s)\| f'''(s) - f''(s)\left(\frac{f''(s)\cdot f'''(s)}{\|f''(s)\|}\right)}{\|f''(s)\|^2} = \frac{f'''(s)}{\|f''(s)\|} - f''(s)\left(\frac{f''(s)\cdot f'''(s)}{\|f''(s)\|^3}\right)$$

Luego entonces si

$$B'(s) = T(s) \times N'(s)$$

se tiene que

$$B'(s) = f'(s) \times \frac{f'''(s)}{\|f''(s)\|} - f''(s)\left(\frac{f''(s)\cdot f'''(s)}{\|f''(s)\|^3}\right) = \frac{1}{\|f''(s)\|} f'(s) \times f'''(s) - \left(\frac{f''(s)\cdot f'''(s)}{\|f''(s)\|^3}\right) f'(s) \times f''(s)$$

La torsión esta dada por

$$B'(s) = \tau(s)N(s) \Rightarrow B'(s)\cdot N(s) = \tau(s)N(s)\cdot N(s) \Rightarrow B'(s)\cdot N(s) = \tau(s)\|N(s)\|^2 \Rightarrow B'(s)\cdot N(s) = |\tau(s)|$$

Vamos a calcular $B'(s) \cdot N(s)$ tenemos que

$$\left(\frac{1}{\|f''(s)\|} f'(s) \times f'''(s) - \left(\frac{f''(s) \cdot f'''(s)}{\|f''(s)\|^3}\right) f'(s) \times f''(s)\right) \cdot \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|} =$$

$$\frac{1}{\|f''(s)\|^2} f'(s) \times f'''(s) \cdot f''(s) - \cancel{\left(\frac{f''(s) \cdot f'''(s)}{\|f''(s)\|^4}\right) f'(s) \times f''(s) \cdot f''(s)} = \frac{1}{\|f''(s)\|^2} f'(s) \times f'''(s) \cdot f''(s)$$

La cancelación es porque

$$f'(s) \times f''(s) \cdot f''(s) = 0$$

y como

$$k(s) = \|f''\|$$

se tiene entonces que

$$\tau(s) = \frac{f'(s) \times f'''(s) \cdot f''(s)}{k(s)^2} = -\frac{f'(s) \times f''(s) \cdot f'''(s)}{k(s)^2}$$

Ahora vamos a expresar la torsión en términos de t, se tiene que Ya hemos visto que

$$T(s) = f'(s) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

Por lo tanto

$$T'(s) = f''(s) = \frac{d\left(\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}\right)}{ds} = \frac{d\left(\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}\right)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\left(\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}\right)}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\left(\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}\right)}{dt}\varphi'(s) =$$

$$\frac{d\left(\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}\right)}{dt}\frac{1}{\|f'(t)\|} = \left(\frac{\|f'(t)\|f'' - f'(t)\frac{d(\|f'(t)\|)}{dt}}{\|f'(t)\|^2}\right)\frac{1}{\|f'(t)\|} \underbrace{=}_{*} \left(\frac{\|f'(t)\|f'' - f'(t)\frac{f' \cdot f''}{\|f'(t)\|}}{\|f'(t)\|^2}\right)\frac{1}{\|f'(t)\|}$$

Donde *

$$\frac{d\left(\|f'(t)\|\right)}{dt} = \frac{d\sqrt{f'(t) \cdot f'(t)}}{dt} = \frac{f'(t) \cdot f''(t)}{\|f'(t)\|}$$

Por tanto

$$\left(\frac{\|f'(t)\|f'' - f'(t)\frac{f' \cdot f''}{\|f'(t)\|}}{\|f'(t)\|^2}\right)\frac{1}{\|f'(t)\|} = \left(\frac{\|f'(t)\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f'}{\|f'(t)\|}\right)\frac{1}{\|f'(t)\|^3} = \frac{1}{\|f'\|^4}\left(\|f'(t)\|^2 f'' - (f' \cdot f'') f'\right)$$

Por lo tanto

$$f''(s) = \frac{1}{\|f'\|^4}\left(\|f'(t)\|^2 f''(t) - (f'(t) \cdot f''(t)) f'(t)\right) \tag{1}$$

$$f'(s) \times f''(s) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \times \left(\frac{1}{\|f'\|^4}\left(\|f'(t)\|^2 f''(t) - (f'(t) \cdot f''(t)) f'(t)\right)\right) =$$

$$\left(\frac{1}{\|f'(t)\|^3}\right) f'(t) \times f''(t) - \left(\frac{f'(t) \cdot f''(t)}{\|f'(t)\|}\right) \cancel{f'(t) \times f'(t)} = \left(\frac{1}{\|f'(t)\|^3}\right) f'(t) \times f''(t)$$

Mientras que

$$f'''(s) = \frac{df''(s)}{ds} = \left(\frac{df''(s)}{dt}\right)\frac{dt}{ds} = \left(\frac{df''(s)}{dt}\right)\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \left(\frac{df''(s)}{dt}\right)\frac{1}{\|f'(t)\|} =$$

$$\frac{1}{\|f'(t)\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|f'\|^4}\left(\|f'(t)\|^2 f''(t) - (f'(t)\cdot f''(t))\, f'(t)\right)\right) =$$

$$\left(\frac{1}{\|f'(t)\|}\right)\left[\left(\frac{1}{\|f'(t)\|^2}f'''(t)\right) + \left(\frac{1}{\|f'(t)\|}\right)' f''(t) - \left(\frac{f'(t)\cdot f''}{\|f'(t)\|^4}\right)f''(t) - f'(t)\left(\frac{f'(t)\cdot f''}{\|f'(t)\|^4}\right)\right]$$

Por lo tanto hacemos

$$f'(s)\times f''(s)\cdot f'''(s) =$$

$$\left(\frac{1}{\|f'(t)\|^3}\right)f'(t)\times f''(t)\cdot\left(\frac{1}{\|f'(t)\|}\right)\left[\left(\frac{1}{\|f'(t)\|^2}f'''(t)\right) + \cancel{\left(\frac{1}{\|f'(t)\|}\right)' f''(t)} - \cancel{\left(\frac{f'(t)\cdot f''}{\|f'(t)\|^4}\right)f''(t)} - \cancel{f'(t)\left(\frac{f'(t)\cdot f''}{\|f'(t)\|^4}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\|f'(t)\|^3}f'(t)\times f''(t)\cdot\frac{1}{\|f'(t)\|^3}f'''(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|^6}f'(t)\times f''(t)\cdot f'''$$

de la igualdad

$$\frac{f'(s)\times f'''(s)\cdot f''(s)}{k(s)^2} = -\frac{f'(s)\times f''(s)\cdot f'''(s)}{k(s)^2} = -\frac{1}{\|f'(t)\|^6}\frac{f'(t)\times f''(t)\cdot f'''}{\left(\frac{\|f'\times f''\|}{\|f'(t)\|^3}\right)^2}$$

Tenemos que la torsión esta dada por

$$\tau(t) = -\frac{f'(t)\times f''(t)\cdot f'''}{\left(\|f'(t)\times f''(t)\|\right)^2}$$

$$\boxed{\text{Fórmulas de Frenet Serret}}$$

Proposición 1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $c \subset \mathbb{R}^n$. Si $f''(s)$ existe y es diferente de cero entonces*

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

Demostración. La regla de la cadena y la fórmula $s'(t) = \|f'(t)\|$ permite relacionar el vector curvatura dT/ds con la derivada T' respecto al tiempo mediante la ecuación:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\,\frac{dt}{ds} = T'\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = T'\frac{1}{\|f'(t)\|}$$

y puesto que $T'(t) = \|T'(t)\|N(t)$, obtenemos:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{\|f'(t)\|}\|T'\|N(t)$$

que dice que el vector curvatura tiene la misma dirección que la normal principal $N(t)$. El factor de escala que multiplica a $N(t)$ es un número no negativo llamado curvatura de la curva en t, y se designa por $k(t)$.

Asi la curvatura de $k(t)$ definida como la longitud del vector curvatura esta dado por la fórmula siguiente:

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|f'(t)\|}$$

□

Proposición 2. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $c \subset \mathbb{R}^n$. Si para $s \in I$ se tiene que $B'(s)$ existe entonces $B'(s)$ es un multiplo escalar de $N(s)$.*

Demostración. Dado que

$$\begin{aligned} \|B(s)\| &= \|T(s) \times N(s)\| \\ &= \|T(s)\|\|N(s)\| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que $B'(s)$ es perpendicular a $B(s)$ es decir

$$B'(s) \cdot B(s) = 0$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} B'(s) &= T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= (k(s))(N(s) \times N(s)) + T(s) \times N'(s) \\ & T(s) \times N'(s) \end{aligned}$$

resulta entonces que

$$B'(s) \cdot T(s) = 0$$

Por lo tanto el conjunto

$$\{T(s),\ N(s),\ B(s)\}$$

forma una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$, entonces existen escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$B'(s) = \alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma B(s)$$

multiplicando por $T(s)$ se tiene

$$T(s) \cdot B'(s) = T(s) \cdot (\alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma B(s))$$

es decir

$$0 = \alpha$$

y también multiplicando por $B(s)$ se tiene

$$B(s) \cdot B'(s) = B(s) \cdot (\alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma B(s))$$

es decir

$$0 = \gamma$$

por lo que

$$B'(s) = \beta N(s)$$

□

Proposición 3. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $c \subset \mathbb{R}^n$. Si para $s \in I$ se tiene que $N'(s)$ existe entonces*

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

Demostración. Tenemos que

$$N(s) = B(s) \times T(s)$$

por lo que

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s) \\ &= (-\tau(s)N(s))) \times T(s) + B(s) \times (\kappa(s)N(s)) \\ &= (\tau(s)T(s))) \times N(s) - (\kappa(s))N(s) \times B(s) \\ &= \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s) \end{aligned}$$

□

Las identidades

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$
$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$
$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

son conocidas como las fórmulas de Frenet Serret