Conjuntos Conexos

Un conjunto conexo es un subconjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ que no puede ser descrito como unión disjunta de 2 conjuntos abiertos.

Intuitivamente, un conjunto conexo formado por una sola pieza "que no se puede dividir".
Cuando un conjunto no sea conexo, diremos que es inconexo, disconexo o no conexo.

Ejemplo: Consideremos el conjunto $G = \mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales vamos a ver que G no es conexo

Dem:

1) Sea $A_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < \sqrt{2}\}$ y $B_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > \sqrt{2}\}$ se tiene entonces que A_1 y B_1 son abiertos disjuntos y su union es G $\therefore$ G no sería conexo.

Ejemplo: Consideremos el conjunto $G = \mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales vamos a ver que G no es conexo

Dem:

1) Sea $A_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < \frac{3}{2}\}$ y $B_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > \frac{3}{2}\}$ se tiene entonces que A_1 y B_1 son abiertos disjuntos y su union es contitne a G $\therefore$ G no sería conexo.

Proposición: Demuestre que los únicos subconjuntos de la recta real que son conexos son los puntos y los intervalos.

Dem:

1) Todo subconjunto $\overline{X}$ de $\mathbb{R}$ que no sea ni un punto ni un intervalo es no conexo ya que $\exists\ a, b \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ y $a < c < b$ y $c \notin X$, entonces $X = \{(-\infty, c) \cap X\} \cup \{(c, \infty) \cap X\}$ y por tanto X no sería conexo.

2) Un punto es conexo.

3) Todo intervalo es conexo

Sea X un intervalo y supongamos que X es no conexo, entonces $X = A_1 \cup B_1 \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset \quad A_1 \neq B_1 \neq \emptyset$ $A_1 = X \cap A, \quad B_1 = X \cap B$ con A, B abiertos de $\mathbb{R}$ como $A_1 \neq \emptyset \quad \exists a_1 \in A_1$ y como $B_1 \neq \emptyset \quad \exists b_1 \in B_1 \quad a_1 \neq b_1 \quad a_1 < b_1$, sea $a =$sup$\{x \in A_1 | a_1 \leq x < b_1\}$ =sup$\{A_1 \cap [a, b)\}$.

El supremo $\exists$ pues $A_1 \cap [a_1, b)$ esta acotado, además $a \in [a_1, b] \quad \Rightarrow \quad a_1 \leq a \leq b_1 \quad \Rightarrow \quad a \in X$ pues X es un intervalo.

Vamos a ver que $a \notin A_1$ y $a \in B_1$.

a) Si $a \in A_1 \subset A$, entonces $a < b_1$ pues $b_1 \in B$, luego $a \in A \cap (-\infty, b)$
$\Rightarrow \exists \ \varepsilon > 0$ tal que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset A \cap (-\infty, b) \Rightarrow a < a+\varepsilon < b_1 \quad a+\varepsilon \in X$ pues X es un intervalo
$a+\varepsilon \in X \quad a+\varepsilon \subset A \Rightarrow a+\varepsilon \in A_1 = A \cap X$ y $a_1 \leq a < a+\varepsilon < b_1$
y a no puede ser supremo del conjunto anterior.

b) Si $a \in B_1 \subset B$, entonces $a_1 < a$ pues $a_1 \in A_1$ luego $a \in (a_1, \infty) \cap B$ abierto
$\Rightarrow x \in X$, por ser X un intervalo, luego
$[a-\varepsilon, a] \subset X$ y $a-\varepsilon, a] \subset B \Rightarrow [a-\varepsilon, a] \subset B_1 = X \cap B$
$\Rightarrow a-\varepsilon$ es una cota superior del conjunto anterior $A_1 \cap [a_1, b_1]$ y como $a-\varepsilon < a$ luego a no puede ser el supremo de dicho conjunto.

<u>**Teorema:**</u> La totalidad del espacio $\mathbb{R}^n$ es conexo.

<u>**Dem:**</u>
De no ser así, existirían 2 conjuntos abiertos ajenos no vacíos A, B cuya unión sería $\mathbb{R}^n$.

Sea $x \in A$ y $y \in B$ y considere el segmento S que une a x con y; es decir $S = \{x + t(y-x),\ t \in [0,1]\}$.

Sean $A_1 = \{t \in \mathbb{R} | x + t(y-x) \in A\}$, $B_1 = \{t \in \mathbb{R} | x + y(y-x) \in B\}$.
$A_1 \cap B_1 = \emptyset \quad A_1 \neq \emptyset \neq B_1$ y proporcional una inconexión de S <u>CONTRADICCIÓN</u>
Ya que el segmento S, se puede ver como un intervalo, y los intervalos son conjuntos conexos.

<u>**Teorema:**</u> Si A y B son subconjuntos conexos y no están separados, entonces $A \cup B$ es conexo.

<u>**Dem:**</u>

Sea $X = A \cup B$ y supongamos que X no es conexo. Entonces existen S y $T \neq \emptyset$, $S \cap T = \emptyset$ $X = S \cup T$ $A \subset S$ ó $A \subset T$ o bien $B \subset S$ ó $B \subset T$.
Si $A \subset S$ entonces $B \subset S$.
$\therefore A \cup B \subset S$ y $T \neq \emptyset$ <u>CONTRADICCIÓN</u>.

<u>**Teorema:**</u> Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. G es conexo si y sólo si cualquier par de puntos x, y en G se pueden unir por medio de una curva poligonal que cae enteramente en G.

<u>**Dem:**</u>

Suponga que G no es conexo y que A, B es una disconexión de G. Sea $x \in A \cap G$ y $y \in G \cap B$ y sea $P = \{L_1, \ldots\ldots, L_k\}$ una curva poligonal que cae enteramente en G que une x con y.

Sea k el número natural más pequeño tal que el punto terminal z_{k-1} de $L_k \in A \cap G$, el punto terminal $z_k \in B \cap G$.

Si A_1 y B_1 se definen como:
$A_1 = \{t \in \mathbb{R}| \;\; z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in A \cap G\}$.
$B_1 = \{t \in \mathbb{R}| \;\; z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1} \in B \cap G\}$.

Entonces A_1 y B_1 son abiertos ajenos no vacíos de $\mathbb{R}$. De donde el par A_1, B_1 forman una disconexión del intervalo unitario. <u>CONTRADICCIÓN</u>.
$\therefore$ Si G no es conexo, $\exists$ 2 puntos de G que no se pueden unir por medio de una curva poligonal.

Ahora suponga que G es abierto conexo en $\mathbb{R}^n$ y $x \in G$.

Sea G_1 el conjunto de todos los puntos de G que se pueden unir a x por medio de una curva poligonal que cae enteramente en G. Sea G_2 tal que conste de todos los puntos de G que no se pueden unir a x por medio de una curva poligonal que cae en G. Es claro que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \neq \emptyset$ ya que $x \in G_1$ y demostraremos que G_1 es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Si $y \in G_1$ como G es abierto p.a. $r > 0$, $\|w - y\| < r$ implica que $w \in G$. Por la definición de G_1, y se puede unir a x por medio de una poligonal, y añadiendo un segmento de y a w, se deduce que $w \in G_1$. Por tanto G_1 es abierto de $\mathbb{R}^n$. Análogamente, el subconjunto G_2 es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Si G_2 no es vacío, G_1 y G_2 forman una disconexión de G. <u>CONTRADICCIÓN</u>.

Pues G es conexo. $\therefore$ $G_2 = \emptyset$ y todo punto de G se puede unir a x por medio de una curva poligonal que cae por completo en G.