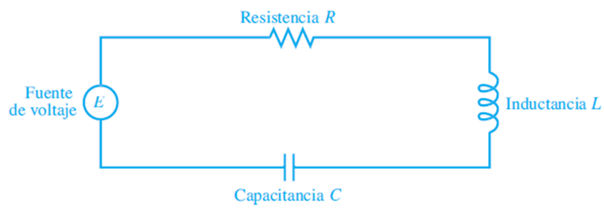
Circuitos eléctricos.

Las ecuaciones que describen las relaciones voltaje-corriente para una resistencia, un inductor y un condensador junto con las leyes de Kirchhoff que restringen el comportamiento de estas cantidades cuando los elementos se conectan en forma eléctrica a un circuito.

Ejemplo El circuito RLC en serie de la figura tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) = \text{sen}(100t)$ voltios (V), una resistencia de 0,02 ohms (Ω), un inductor de 0,001 henrios (H) y un condensador de 2 faradios (F). Si la corriente y la carga iniciales en el condensador son iguales a cero, determinar la corriente en el circuito para $t > 0$.



Solución tenemos que $L = 0{,}001$ H, $R = 0{,}02\ \Omega$, $C = 2$ F y $E(t) = \text{sen}(100t)$. Según la ley de corriente de Kirchhoff, la misma corriente I pasa por cada elemento del circuito. La corriente que pasa por el condensador es igual a la razón instantánea de cambio de su carga q:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

observamos que la caída de voltaje a través del condensador (EC), la resistencia (ER) y el inductor (EL) se expresan como

$$E_c = \frac{q}{c}, \quad E_R = RI, \quad E_L = L\frac{dI}{Dt} \tag{2}$$

Por tanto, la ley del voltaje de Kirchhoff $E_L + E_R + E_C = E$ se puede expresar como

$$L\frac{dL}{dt} + RI + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{3}$$

En la mayor parte de las aplicaciones nos interesará determinar la corriente $I(t)$. Si derivamos (3) con respecto de t y sustituimos I en vez de $\frac{dq}{dt}$, obtenemos

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \tag{4}$$

Al sustituir los valores dados tenemos

$$(0{,}001)\frac{d^2I}{dt^2} + (0{,}02)\frac{dI}{dt} + (0{,}5)I = 100\cos(100t)$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 500I = 100{,}000\cos(100t) \tag{5}$$

La ecuación homogénea asociada con (5) tiene la ecuación auxiliar

$$r^2 + 20r + 500 = (r + 10)^2 + (20)^2 = 0$$

cuyas raíces son $10 \pm 20i$ Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea es

$$I_h = C_1 e^{-10t} \cos(20t) + C_2 e^{-10t} \operatorname{sen}(20t) \tag{6}$$

Para determinar una solución particular de (5), podemos usar el método de coeficientes indeterminados. Hacemos

$$I_p = A\cos(100t) + B\operatorname{sen}(100t)$$

y realizamos el procedimiento visto anteriormente para obtener finalmente, con tres decimales,

$$A = -10{,}080, \quad B = 2{,}122$$

Por lo tanto, una solución particular de (5) está dada por

$$I_p = -10{,}080\cos(100t) + 2{,}122\operatorname{sen}(100t) \tag{7}$$

Como $I = I_h + I_p$ vemos de (**??**) y (**??**) que

$$I(t) = e^{-10t}(C_1\cos(20t) + C_2\operatorname{sen}(20t)) - 10{,}080\cos(100t) + 2{,}122\operatorname{sen}(100t) \tag{8}$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2, necesitamos los valores $I(0)$ e $I'(0)$ Sabemos que $I(0) = q(0) = 0$. Para determinar $I'(0)$ sustituimos los valores para L, R y C en la ecuación (3) e igualamos los dos lados en $t = 0$, para obtener

$$(0{,}001)I'(0) + (0{,}02)I(0) + (0{,}5)q(0) = \operatorname{sen}(0)$$

Como $I(0) = q(0) = 0$, vemos que $I'(0)$. Por último, usamos $I(0)$ en (**??**) y las condiciones iniciales $I(0)I'(0) = 0$ para obtener el sistema

$$\begin{aligned} I(0) &= C_1 - 10{,}080 = 0 \\ I'(0) &= -10C_1 + 20C_2 + 212{,}2 = 0 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema tenemos que $C_1 = 10{,}080$ y $C_2 = 5{,}570$. Por lo tanto, la corriente en el circuito RLC en serie es

$$I(t) = e^{-10t}(10{,}080\cos(20t) - 5{,}570\operatorname{sen}(20t)) - 10{,}080\cos(100t) + 2{,}122\operatorname{sen}(100t) \tag{9}$$

Observe que, como en el caso de las vibraciones mecánicas forzadas, la corriente en (**??**) tiene dos componentes: I_h, una **corriente transitoria** que tiende a cero cuando $t \to \infty$ y la otra componente

$$I_p = -10{,}080\cos(100t) + 2{,}122\operatorname{sen}(100t)$$

una **corriente de estado estacionario** senoidal que permanece.