Espacios Normados (Normas en $\mathbb{R}^n$)

Uno de los conceptos más importantes del cálculo y del analisis matemático es el de métrica o distancia.

En $\mathbb{R}^n$ la noción de metrico depende a su vez del concepto de norma de un vector.

Norma de un vector: Si $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ es la longuitud del segmento de recta que une los puntos $\bar{0} = (0,0)$ y $\bar{P} = (x, y)$, sabemos por el Teorema de Pitagoras que esta longuitud esta dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Este número no negativo lo denominamos la norma de un vector $\bar{v} = \bar{OP}$. En el espacio tridimensional tambien tenemos $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ como la norma de un vector con respecto al origen.

Definición.- Si $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos la norma euclidiana de $\bar{x}$ como el real no negativo $\sqrt{x^2 + \ldots + z^2}$ que denotaremos por cualquiera de los simbolos $\|\bar{x}\|$ ó $N(x)$ es decir,

$$\|\bar{x}\| = N(x) = \sqrt{x^2 + \ldots + z^2}$$

Tenemos asi una función $\| \, \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que designamos la norma euclidiana, la cual asigna a cada vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un real $\|\bar{x}\|$.

Desigualdad de Cauchy-Shwarz

Sean $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$ entonces $|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + y_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$

Primero probaremos la desigualdad

$$|x_1||y_1| + \ldots + |x_n||y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + y_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

lo cual implica la desigualdad deseada ya que

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leq |x_1||y_1| + \ldots + |x_n||y_n|$$

Solución: Si alguno de los vectores $\bar{x}$ ó $\bar{y}$ es $\bar{0}$ entonces la desigualdad se cumplo trivialmente, pues en este caso ambos miembros son 0. Si $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$ hagamos $\alpha = \sqrt{x_1^2 + \ldots + y_n^2} \quad \beta = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$ usando α y β, la desigualdad a probar se escribe

$$|x_1||y_1| + \ldots + |x_n||y_n| \leq \alpha\beta$$

y como $\alpha, \beta > 0$ esta desigualdad es equivalente a

$$\left|\frac{x_1}{\alpha}\right|\left|\frac{y_1}{\beta}\right| + \ldots + \left|\frac{x_n}{\alpha}\right|\left|\frac{y_n}{\beta}\right| \leq 1$$

Dado que para cualquiera reales a y b se cumple

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{x_1}{\alpha}\right|\left|\tfrac{y_1}{\beta}\right| + \ldots + \left|\tfrac{x_n}{\alpha}\right|\left|\tfrac{y_n}{\beta}\right| &\leq \frac{\dfrac{x_1^2}{\alpha^2} + \dfrac{y_1^2}{\beta^2}}{2} + \ldots + \frac{\dfrac{x_n^2}{\alpha^2} + \dfrac{y_n^2}{\beta^2}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{\alpha^2}}{2} + \frac{\dfrac{y_1^2 + \ldots + y_n^2}{\beta^2}}{2} \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Pasemos ahora a las propiedades de la norma euclidiana.

Proposición.- Para cualquiera vestores $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \quad \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

I) $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \|0\| = 0$

II) $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\|\bar{x}\|$

III) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

IV) $\|\bar{x}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0$

Demostración :

I) $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \geq 0$ pues es la raíz positiva

$\therefore \quad \|\bar{x}\| \geq 0$

II) $\|\alpha\bar{x}\|$

$$\begin{aligned}\|\alpha\bar{x}\| &= \sqrt{(\alpha x_1)^2+\ldots+(\alpha x_n)^2}\\ &= \sqrt{\alpha^2x_1^2+\ldots+\alpha^2x_n^2}\\ &= \sqrt{\alpha^2(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\\ &= |\alpha|\|\bar{x}\|\end{aligned}$$

III) $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2$

$$\begin{aligned}\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 &= (x_1+y_1)^2+\ldots+(x_n+y_n)^2\\ &= x_1^2+2x_1y_1+y_1^2+\ldots+x_n^2+2x_ny_n+y_n^2\\ &= x_1^2+\ldots+x_n^2+2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)+y_1^2+\ldots+y_n^2\\ &= \|\bar{x}\|^2+2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)+\|\bar{y}\|^2\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Shwarz

$$x_1y_1+\ldots+x_ny_n \leq \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$$

se tiene que

$$\|\bar{x}\|^2+2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)+\|\bar{y}\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2+2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|+\|\bar{y}\|^2 = [\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|]^2$$

$\therefore \quad \|\bar{x}+\bar{y}\|^2 \leq [\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|]^2$ y al sacar raiz obtenemos $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$

IV) Si $\|\bar{y}\|=0$ se tiene entonces $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}=0$ es decir $x_1^2+\ldots+x_n^2=0$ pero $x-i^2 \geq 0$

$\therefore \quad x_i^2=0 \quad \forall\, i=1,\ldots,n$

$\therefore \quad \bar{x}=0$

El concepto general de Norma en $\mathbb{R}^n$. Las propiedades de la norma euclidiana nos ayudan para definir la nocion abstracta de Norma.

Definición: Una norma en $\mathbb{R}^n$ es cualquier función $\|\ \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades que denominaremos Axiomas de Norma para cualesquiera $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

I) $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \|0\| = 0$

II) $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\|\bar{x}\|$

III) $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

IV) $\|\bar{x}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0$

Proposición: Para toda norma $\| \, \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se cumple:

I) $\|-\bar{x}\| = \|\bar{x}\| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

II) $|\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\| \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

Demostración :

I) $\|-\bar{x}\| = |-1|\|\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$

II) $0 \leq \|\bar{x}\| = \|\bar{x}-\bar{y}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\| + \|\bar{y}\|$

$\therefore \quad \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

Intercambiando $\bar{x}$ por $\bar{y}$ obtenemos $\|\bar{y}\| - \|\bar{x}\| \leq \|\bar{y}-\bar{x}\| = \|\bar{x}-\bar{y}\|$

$\therefore \quad |\|\bar{y}\| - \|\bar{x}\|| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

Otras normas en $\mathbb{R}^n$

Definimos $\| \, \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\| \, \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Por demostrar $\| \, \|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$

I) Dado que $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$, se tiene $\| \, \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \geq 0 \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

II) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha\bar{x}\| &= |\alpha x_1| + \ldots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha||x_1| + \ldots + |\alpha||x_n| \\ &= |\alpha|(|x_1| + \ldots + |x_n|) \\ &= |\alpha|\|\bar{x}\| \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

III) Si $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\| &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\ &\leq ||x_1| + |y_1| + \ldots + |x_n| + |y_n| \\ &= |x_1| + \ldots + |x_n| + \ldots + |y_1| + \ldots + |y_n| \\ &= \|\bar{x}\|_1 + \|\bar{y}\|_1 \end{aligned}$$

Si $\|\bar{x}\|_1 = 0$

$\Rightarrow \quad |x_1| + \ldots + |x_n| = 0$ y como cada $|x_i| \geq 0$ $i = 1, \ldots, n$

entonces $|x_1| + \ldots + |x_n| = 0$

$\Rightarrow \quad |x_i| = 0$ $i = 1, \ldots, n$

$\therefore \quad \bar{x} = 0$

Consideremos ahora la función $\| \, \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\| \, \|_\infty = \text{máx}\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}$ $\forall \, x \in \mathbb{R}^n$

Proposición.- La función $\| \, \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, que se denomina norma del máximo o norma cúbica.

Demostración :

1. Puesto que $|x_i| \geq 0$ $i = 1, \ldots, n$

   entonces

$$\text{máx}\{|x_1| + \ldots + |x_n|\} \geq 0$$

   es decir

$$\|\bar{x}\|_\infty \geq 0$$

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Se tiene entonces que

$$\|\alpha\bar{x}\| = \text{máx}\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$$

   Supongamos ahora que

$$|x_{i\alpha}| = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

$\therefore \quad |x_{i\alpha}| \geq |x_i| \qquad \forall \quad i = 1, \ldots, n$

$\therefore \quad |\alpha||x_{i\alpha}| \geq |\alpha||x_i| \qquad \forall \quad i = 1, \ldots, n$

$\therefore \quad |\alpha x_{i\alpha}| \geq |\alpha x_i| \qquad \forall \quad i = 1, \ldots, n$

por lo que

$$|\alpha||x_{i\alpha}| = |\alpha x_i| = \text{máx}\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$$

es decir

$$|\alpha| \,\text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$$

$\therefore \quad |\alpha|\|\bar{x}\|_\infty = \|\alpha\bar{x}\|_\infty$

3. $\|\bar{x} + \bar{y}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\}$

   Sea

$$|x_1\alpha + y_1\alpha| \leq \text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\}$$

   como

$$|x_1\alpha + y_1\alpha| \leq |x_1\alpha| + |y_1\alpha|$$

   se tiene que

$$\text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \leq |x_1\alpha| + |y_1\alpha|$$

   pero por definición de

$$\text{máx}\{|x_1| + \ldots + |x_n|\} \quad \text{máx}\{|y_1| + \ldots + |y_n|\}$$

   también se tiene que

$$|x_1\alpha| \leq \text{máx}\{|x_1| + \ldots + |x_n|\} \qquad |y_1\alpha| \leq \text{máx}\{|y_1| + \ldots + |y_n|\}$$

   luego

$$\text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \leq \text{máx}\{|x_1| + \ldots + |x_n|\} + \text{máx}\{|y_1| + \ldots + |y_n|\}$$

   o sea

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_\infty + \|\bar{y}\|_\infty$$

4. $\|\bar{x}\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \max\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}$

   sea

$$|x_1\alpha| = \max\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}$$

   entonces

$$|x_1\alpha| = 0$$

   $\therefore \quad |x_1\alpha| = 0$

Sea $I = [0,1]$. Demsotrar que $\|f\| = \sup\{|f(x)|\}$. Es una norma de $C[0,1]$.

Solución: Recordar que toda función real continua definida en un intervalo cerrado es acotada, por tanto $\|f\|$ está bien definida. Puesto que $|f(x)| \geq 0 \quad \forall \quad x \in I$ entonces $\|f\| \geq 0$ y ademas $\|f\| = 0$ sii $|f(x)| = 0 \quad \forall \quad x \in I$, i.e. sii $f = 0$

Recordemos un resultado

Sean ay b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$. Demostar que $a \leq b$

Supongase que $a > b$ entonces $a = b + \delta, \quad \delta > 0$

tomamos

$$\frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

entonces

$$a > b + \delta > b + \frac{\delta}{2} = b + \varepsilon \quad \underset{\circ}{\bigtriangledown}$$

$\therefore \quad a \leq b$

ahora sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $x_0 \in I$ tal que

$$\begin{aligned}
\|f + g\| &= \sup\{|f(x) + g(x)|\} \\
&\leq |f(x_0) + g(x_0)| + \varepsilon \\
&\leq |f(x_0)| + |g(x_0)| + \varepsilon \\
&\leq \sup\{|f(x)|\} + \sup\{|g(x)|\} + \varepsilon \\
&= \|f\| + \|g\| + \varepsilon
\end{aligned}$$

$\therefore \quad \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Sea $k \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \|kf\| &= \sup\{|kf(x)|\} \\ &= \sup\{|k||f(x)|\} \\ &= |k| \sup\{|f(x)|\} \\ &= |k|\|f(x)\| \end{aligned}$$

Demostrar que $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ es una norma de $C[0,1]$ (funciones continuas en el intervalo $[0,1]$)

1. $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx \geq 0$ puesto que $\quad |f(x)| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx \geq 0$

2. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|kf\| &= \int_0^1 |kf(x)|dx \\ &= \int_0^1 |k||f(x)|dx \\ &= |k| \int_0^1 |f(x)|dx \\ &= |k|\|f\| \end{aligned}$$

3. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \\ &\leq \int_0^1 [|f(x)| + |g(x)|]dx \\ &= \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx \\ &= \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$