Funciones

Una función real de variable real es una aplicación $f : A \to B$ donde A,B son conjuntos de números reales.

$$\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \ B\}$$

Rango: El rango o imagen de la función f es un conjunto que se define como

$$\text{Ran} f = \{f(x) \mid x \in \ \text{Dom} f\}$$

Ejemplo: Encontrar el dominio y rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

Solución: $\text{Dom} f = \left\{ x \in \underline{X} \ \middle| \ \dfrac{1}{x-4} \ \in \ \mathbb{R} \right\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

Obs: $\dfrac{1}{x-4} \in \ \text{Dom} f \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{x-4} \in \ \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \ (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

$\text{Ran} f = \{f(x) \ \mid x \in \ Dom f\} = \left\{ \dfrac{1}{x-4} \ \middle| \ x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \right\}$

Tenemos que

$$y = \frac{1}{x-4} \quad \Rightarrow \quad x - 4 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4y+1}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \frac{1}{x-4} \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} > 4 \right\} = \left\{ y \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} \in \ (-\infty, 4) \right\} \bigcup \left\{ y \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} \in \ (4, \infty) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ y \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} < 4 \right\} \bigcup \left\{ y \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} > 4 \right\} = \left\{ y \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} - 4 < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} - 4 > 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ y \ \middle| \ \frac{4y+1-4y}{y} < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \ \middle| \ \frac{4y+1-4y}{y} > 0 \right\} = \left\{ y \ \middle| \ \frac{1}{y} < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \ \middle| \ \frac{1}{y} > 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \{y \mid y < 0\} \cup \{y \mid y > 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Función acotada

Se dice que $f : A \to B$ está acotada; es decir, existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k \ \forall x \in A$

Función Lineal

Es la aplicación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir, se cumple

$$1) \quad T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$2) \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

Función Par

Una función $f : A \to B$ se dice que es par si $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ la gráfica de una función tal es simétrica respecto al eje Y

Función Impar

Una función $f : A \to B$ se dice que es impar si $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ la gráfica de una función tal es simétrica respecto al origen

ejemplo Vamos a ver que pasa con la suma de funciones pares e impares

Suma de funciones pares

Sean f, g tal que ambas son funciones pares, entonces $f + g$ es par

Demostración. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$ □

Suma de funciones impares

Sean f, g tal que f es funcion par y g es función impar, entonces $f + g$ es impar

Demostración. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -(f(-x) + g(-x)) = -(f + g)(-x)$ □

Suma de funciones par e impar

Sean f, g tal que f es funcion par y g es función impar entonces $f + g$ no es ni par ni impar

Demostración. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) - g(-x) \neq \begin{cases} f + g(-x) & Par \\ -(f + g))(-x) & Impar \end{cases}$ □

Función Periódica

Una función $f : A \to B$ se dice que es periódica si $\exists\ T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ $\forall x \in A$. El número T es el periodo de la función

Función Constante

Una función $f : A \to B$ se dice que es constante si $f(x) = c$ $\forall x \in A$

Función Identidad

Es una función $f : A \to A$ tal que $f(a) = a$ $\forall a \in A$

Función Característica

Si S es un subconjunto de A se define en A una función real llamada función característica del conjunto S

$$X_S : A \to \mathbb{R} \quad como \quad X_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

Composición de funciones

Sean $f : A \to B$ $g : B \to C$ entonces $h : A \to C$ es la función compuesta $h = g \circ f$ si se verifica

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \quad \forall x \in A$$

Función Inyectiva

Una función $f : A \to B$ se dice que es inyectiva ó uno-uno si:

$$Dados \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Función Suprayectiva

Una función $f : A \to B$ se dice que es suprayectiva si:

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad tal \quad que \quad y = f(x)$$

Función Biyectiva

Una función $f : A \to B$ se dice que es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva simultaneamente.

Ejemplo.- Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 2x$.

Para ver que f es inyectiva

$$Sean \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore \quad f \quad es \quad inyectiva$$

Para ver que f es suprayectiva tenemos que f no es suprayectiva pues los elementos impares de $\mathbb{N}$ no provienen de ningun $x \in \mathbb{N}$

Ahora bien si consideramos la misma función pero ahora la definimos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ y $f(x) = 2x$

Por lo anterior f es inyectiva

Para ver que es suprayectiva teneoms que si $y \in \mathbb{P} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \frac{y}{2} = x \therefore$

$$f(x) = f(\frac{y}{2}) = 2\left(\frac{y}{2}\right) = y$$

por lo tanto f es suprayectiva

Ejemplo.-Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$

Para ver que f es inyectiva

Sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ es decir

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow (x_1^3 - x_2^3) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x - 2^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad o \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

Si $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, ahora bien si $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$ se tiene que

$$x_1 = \frac{-x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4x_2^2}}{2} = \frac{-x_2 \pm \sqrt{-3x_2^2}}{2} = x_2\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

por lo tanto si $x_2 = 0$ entonces $x_1 = 0$ y por tanto $x_1 = x_2$

Composición de funciones inyectivas

Teorema 1. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva*

Demostración. sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ se tiene entonces que

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

como g es inyectiva se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva entonces $x_1 = x_2 \therefore g \circ f$ es inyectiva $\square$

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones suprayectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva*

Demostración. Hay que probar que $\forall z \in C \; \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$, se tiene que por ser $g : B \to C$ sobre $\exists y \in B$ tal que $\forall z \in C \; g(y) = z$ dado que f es suprayectiva y $y \in B \; \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ por lo tanto $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Por lo tanto dado $z \in C \; \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$ $\square$

Teorema 3. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es inyectiva entonces f es inyectiva*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ aplicando g se obtiene $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ por ser $g \circ f$ inyectiva se tiene $x_1 = x_2$ en consecuencia f es inyectiva $\square$

Teorema 4. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva entonces g es suprayectiva*

Demostración. Sea $c \in C$ como $g \circ f$ es suprayectiva, existe α tal que

$$c = g \circ f(\alpha) = g(f(\alpha))$$

esto prueba que $c \in Im_g$ □

Teorema 5. *Sea f la función $f : A \to B$, entonces*
a) f es inyectiva si y solo si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$

Demostración. Sea f inyectiva. Para cada $y \in f(A)$ existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Sea $a \in A$ fijo definimos $g : B \to A$ asi

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si} \quad y \in f(A) \\ & \\ a & \text{si} \quad y \notin f(A) \end{cases}$$

es claro que $(g \circ f)(y) = g(f(y)) = I_A$

□

Teorema 6. *Sea f la función $f : A \to B$, entonces*
a) f es suprayectiva si y solo si existe $h : B \to A$ tal que $f \circ h = I_B$

Demostración. Sea f suprayectiva. Para cada $y \subseteq B$ $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, para $y \subset B$ escogemos $x \in f^{-1}(y)$ y definimos la función $h : B \to A$ como $h(y) = x$ en consecuencia $f \circ h = I_B$ □

La función g se llama inversa izquierda de f y la h es la inversa derecha de f.
Si una función $f : A \to B$ tiene las dos inversas, entonces ambas coinciden

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

g=h se llama inversa de f.
Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2$ admite inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x - 2$ pues

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2) - 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = (x - 2) + 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$

Teorema 7. *Una función admite inversa si es biyectiva*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ aplicamos g y obtenemos

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \to (g \circ f)(x_1) = (g \circ f(x_2)) \to x_1 = x_2$$

$\therefore f$ es uno-uno
Para ver que es uprayectiva sea $y \in B$ aplicando la función identidad

$$y = Id_B(y) = f \circ g(y) \to y = f(g(y))$$

por lo tanto si hacemos $x = g(y) \in A$ se tien que $f(x) = y$ $\therefore$ al ser f inyectiva y suprayectiva entonces f es biyectiva □

Teorema 8. *Una función que es biyectiva admite inversa*

Demostración. Definimos una función $g : B \to A$ mediante $g(y) = x$ si $f(x) = y$, tenemos que ver que g satisface la definición de función. En efecto todo elemento y del domino B tiene un correspondiente x en A, ya que, por se f sobreyectiva, todo y en B proviene de algún x en A. El correspondiente x asociado a y es único, por ser f inyectiva. En efecto si x_1, x_2 fueran distintos de y por f se tendría $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2) = y$, lo cual es absurdo pues f es inyectiva
Hay que ver que $g \circ f = Id_A$. Cualquiera que sea A se tiene

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = Id_A(x)$$

Ahora probaremos que $(f \circ g)(y) = Id_B$ se tiene que

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = Id_B(y)$$

Al tener inversa izquierda e inversa derecha entonces la función admite inversa y ademas es única pues si g' fuera inversa se tendría que

$$g' = g' \circ Id_B = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = Id_A \circ g = g$$

□

Ejemplo.-Probar que la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ admite inversa para $x > -1$
Para ver que es inyectiva se tiene que dados $x_1 \neq x_2 \in Dom_f$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene entonces que

$$\frac{x_1}{1+x_2} = \frac{x_1}{1+x_2} \Rightarrow x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_2 + x_2 \cdot x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

por lo tanto f es inyectiva
Para ver que f es suprayectiva sea $y \in Im_f$ tenemos que ver que existe $x \in Dom_f$ tal que $f(x) = y$. Si $f(x) = y$ entonces

$$\frac{x}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

por lo tanto para $y \in Im_f$ se tiene que existe $x = \frac{y}{1-y} \in Dom_f$ tal que $f(x) = y$
Por tanto al ser f inyectiva y suprayectiva entonces f es biyectiva y por tanto admite una inversa