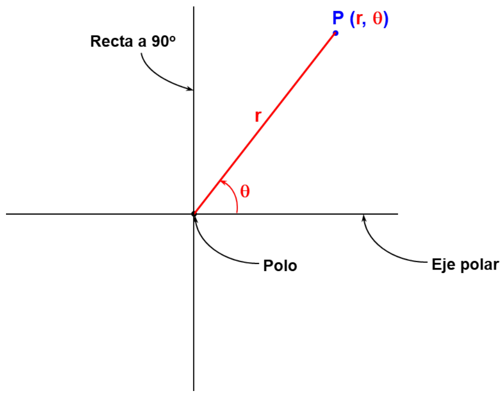
Coordenadas polares

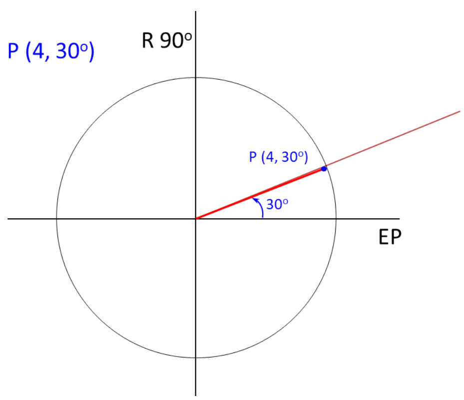
Si en un plano fijamos un punto O que llamaremos polo u origen, y a partir de el trazamos un rayo o semirrecta L horizontal llamado eje polar, cualquier punto P del plano pertenece a una única circunferencia con centro en el polo y cuyo radio sea igual a la distancia $d(P, O)$ del punto al polo.



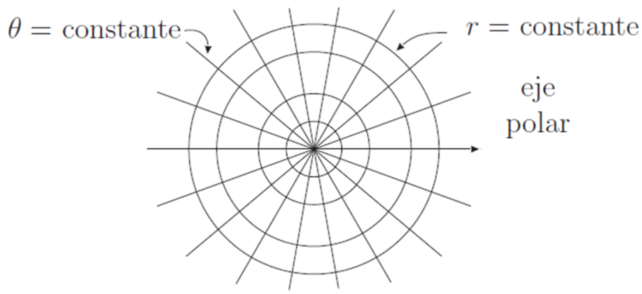
Si el punto P no coincide con el polo, determina también un sólo rayo por el polo, el rayo OP y de esta manera se determina el ángulo del eje polar al rayo OP.
Las coordenadas polares del punto P serán los números (r, θ), llamados radio (o norma) y ángulo (o argumento), respectivamente, donde

$$r = d(O, P) \quad y \quad \theta = \acute{a}ngulo\ semirecta\ y\ OP$$

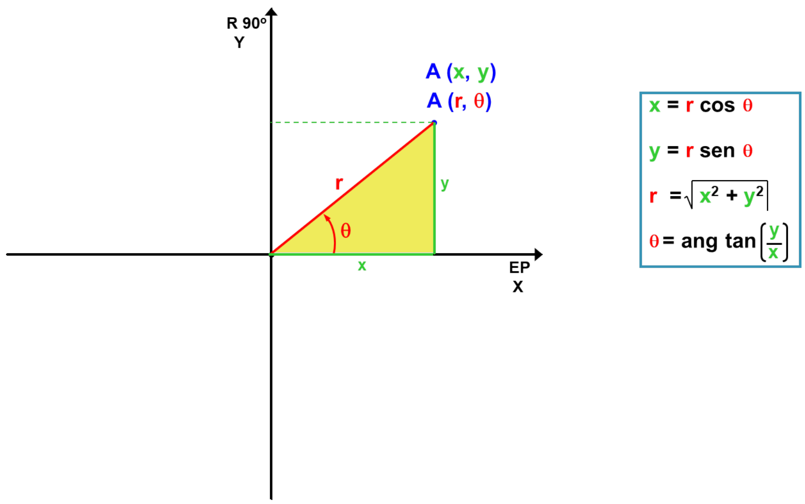
el ángulo no está unívocamente determinado, pues si dos ángulos difieren en un múltiplo de 2π el rayo obtenido es el mismo.
A la inversa sí hay unicidad: dada una pareja (r, θ) hay un único punto P del plano coordenado polar que se localiza como la intersección de la circunferencia de centro el polo y radio r con el rayo a partir del polo que forma un ángulo θ con el eje polar.



las rectas coordenadas, x = cte y y = cte en el caso cartesiano; en este caso el lugar geométrico de los puntos de un plano que satisfacen la condición en coordenadas polares r = cte es una circunferencia con centro en el polo y radio r, y el lugar geométrico de los puntos del plano coordenado polar que satisfacen la condición $\theta = cte$ es el rayo a partir del polo que forma el ángulo θ con el eje polar. Estas circunferencias y estos rayos se denominan curvas coordenadas del sistema coordenado polar.



Es importante notar que dos curvas coordenadas r = cte y $\theta = cte$ cualesquiera se cortan siempre en forma perpendicular (corresponden a una circunferencia y uno de sus radios), como ocurría en el caso cartesiano.
Para establecer fórmulas para obtener las coordenadas polares de un punto P de coordenadas cartesianas (x, y) con el origen como polo. Como el triángulo de la figura es rectángulo, tenemos



Ecuaciones polares

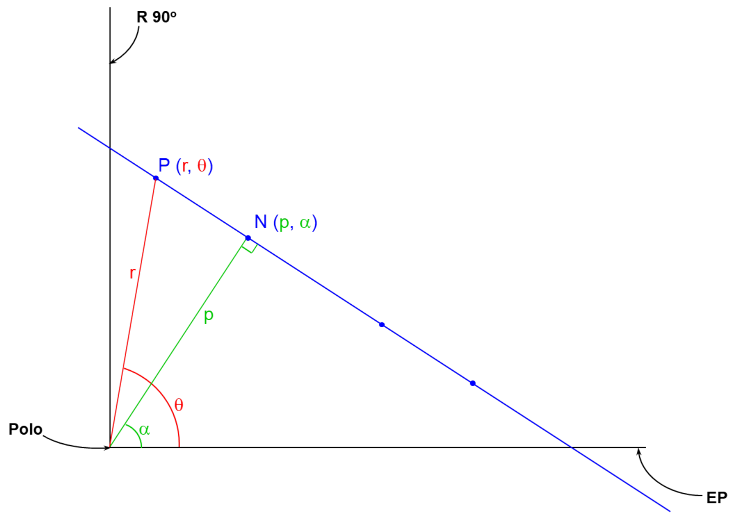
Definición 1. *Una ecuación polar es una ecuación del tipo*

$$F(r,\theta)=0$$

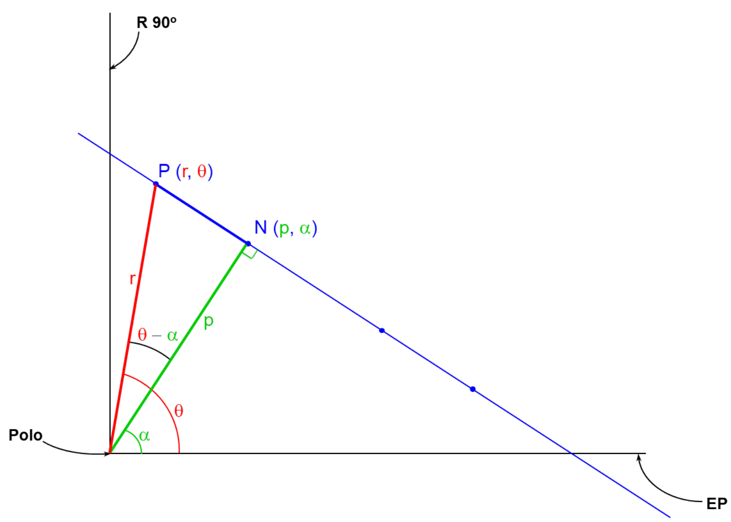
donde $F(r,\theta)$ *es una función con valores reales que depende de los parámetros* r *y* θ

Ecuación polar de la recta Encuentre la ecuación polar de la recta que pasa por los puntos

$$P=(r,\theta),\quad N=(p,\alpha)$$



Solución En este caso se tiene que se forma un triángulo rectángulo con las semirectas y el polo, cuyo ángulo en uno de sus vértices queda determinado por $\angle PON=\theta-\alpha$

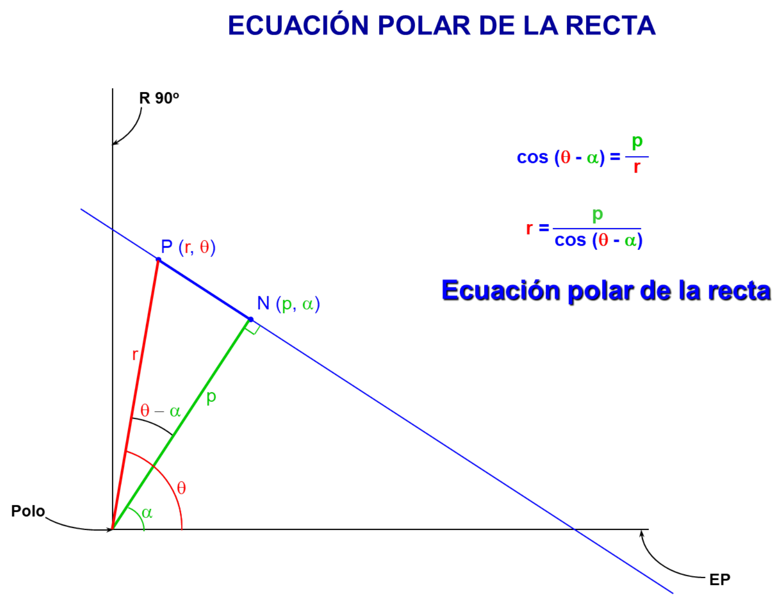


se tiene entonces que

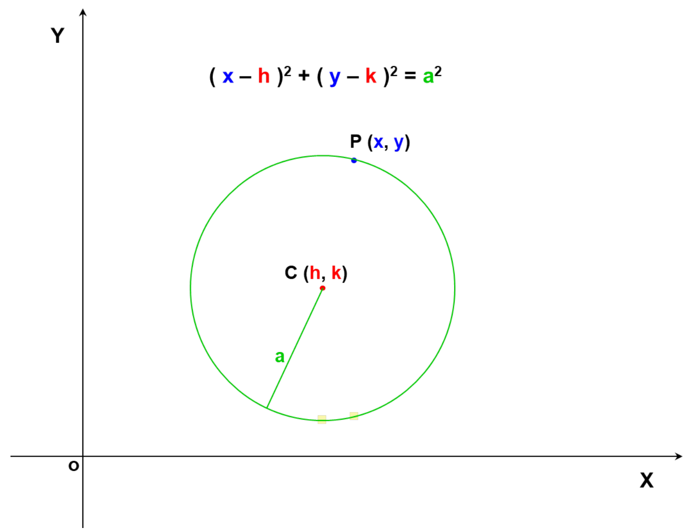
$$\cos(\theta-\alpha)=\frac{P}{r} \;\Rightarrow\; r=\frac{P}{\cos(\theta-\alpha)}$$

podemos decir entonces que la ecuación de la recta es coordenadas polares es

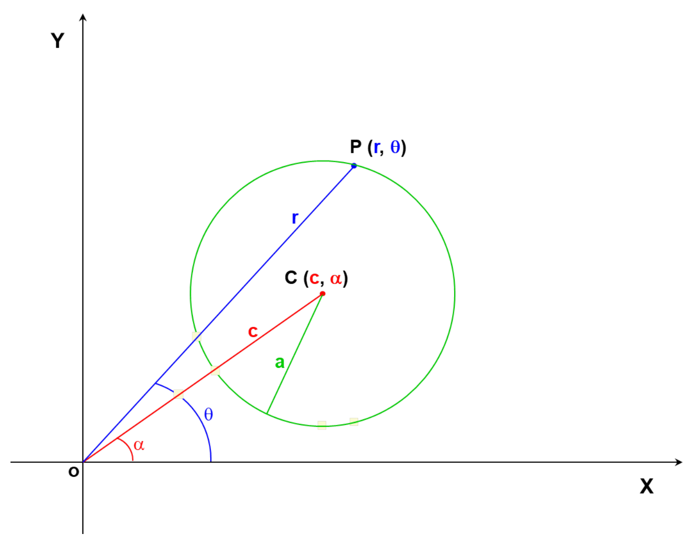
$$F(r,\theta)=r-\frac{P}{\cos(\theta-\alpha)}=0$$



Ecuación polar de la circunferencia Encuentre la ecuación polar de la circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio a

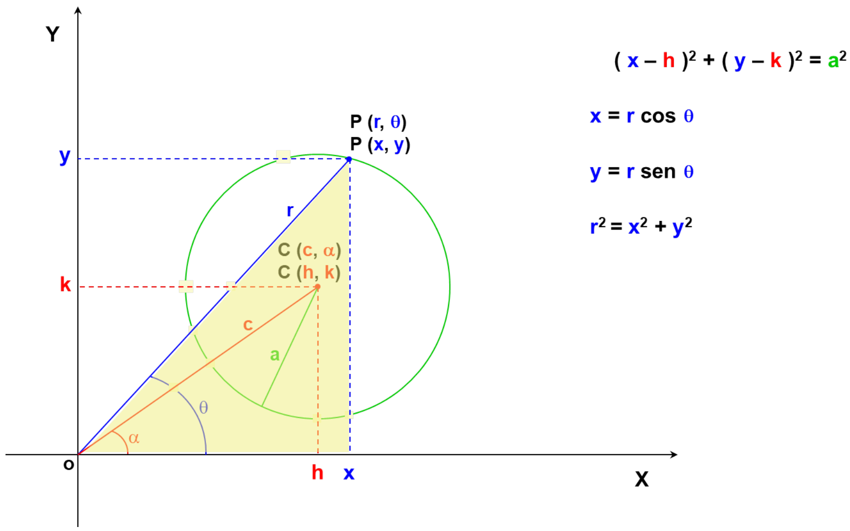


Solución En este caso si consideramos las coordenadas del centro $C = (c, \alpha)$ y un punto en la circunferencia $P = (r, \theta)$ cuyos ángulos en uno son respectivamente α θ



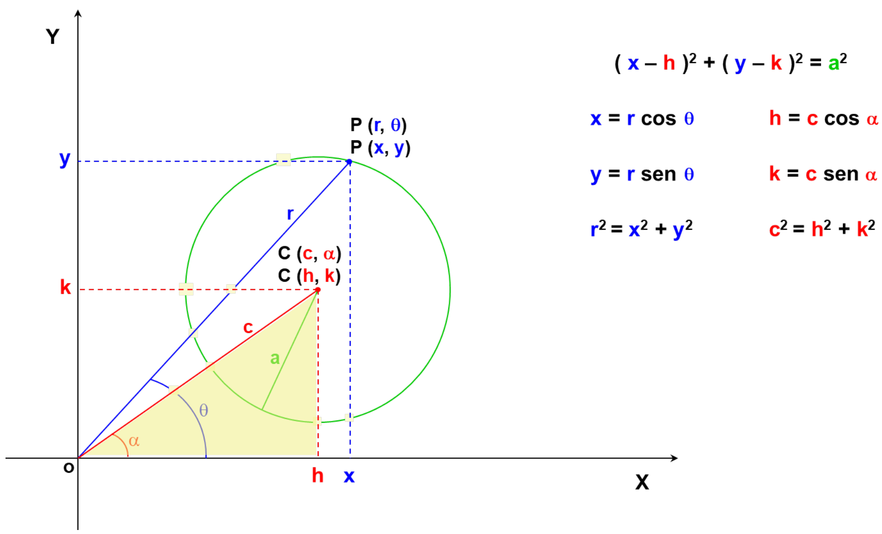
Por otro lado se forma un triángulo rectángulo con las semirectas y sus respectivas proyecciones a los ejes coordenados, se tiene entonces que

$$x = r \cos\ \theta$$
$$y = r \operatorname{sen}\ \theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$



Por otro lado se tiene

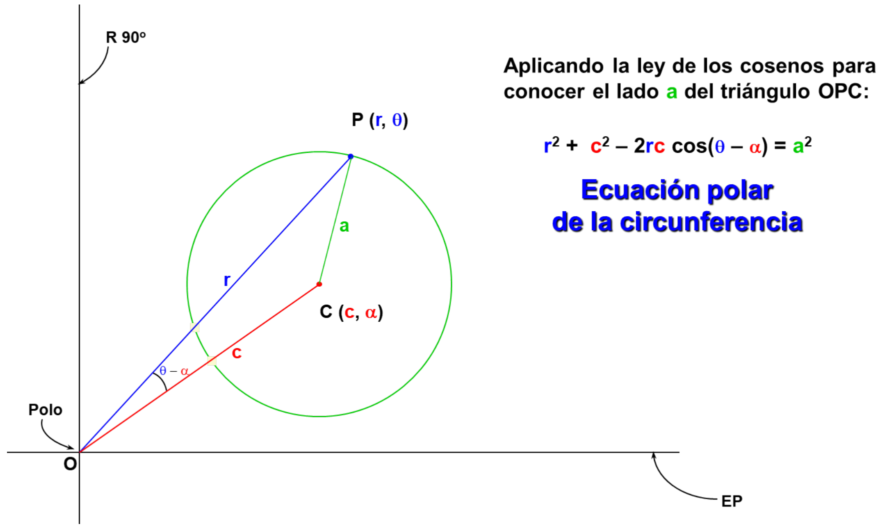
$$h = c\cos\ \alpha$$
$$k = c\,\mathrm{sen}\ \alpha$$
$$c^2 = h^2 + k^2$$



Sustituimos stos valores en la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ y se tiene

$$r^2 + c^2 - 2rc\cos\ (\theta - \alpha) = a^2$$

Se puede llegar a la misma expresión polar, si utilizamos la ley de cosenos en el triángulo $\triangle\ OPC$, en este caso


R 90°
Aplicando la ley de los cosenos para conocer el lado a del triángulo OPC:
P (r, θ)
$r^2 + c^2 - 2rc\cos(\theta - \alpha) = a^2$
Ecuación polar de la circunferencia
a
r
C (c, α)
c
θ − α
Polo
O
EP