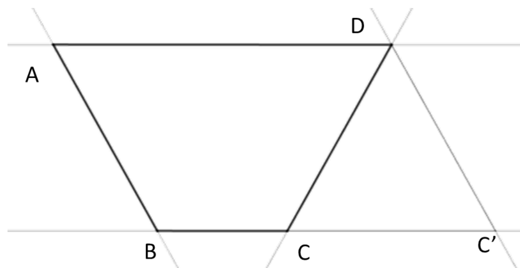
## Circunferencia de los nueve puntos

**Definición 1.** *Un trapecio isósceles tiene dos lados no paralelos iguales.*

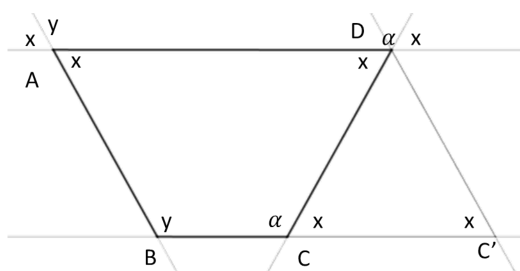
**Proposición 1.** *Un trapecio isóceles es un cuadrilátero cíclico*

*Demostración.* Si trazamos una paralela AB por D, se completa un paralelogramo ABC'D.



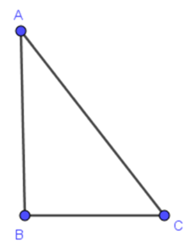

Como $AB = CD$ entonces el triángulo $CC'D$ es isóceles por lo que $\angle\, DCC' = x = \angle\, CC'D$ y como AD es paralela a BC entonces en el vértice D se tiene el ángulo $\angle\, x$ y por ser opuesto al vértice $\angle\, ADC = x$. Por otro lado llamamos $y = \angle\, ABC$ y por ser AD es paralela a BC entonces en el vértice A se tiene el ángulo $\angle\, y$.
Según la figura

$$x + \alpha = x + y \;\Rightarrow\; \alpha = y$$

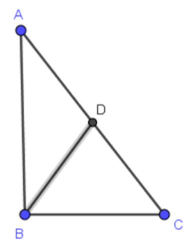



de esta manera en los ángulos opuestos $\angle\, x$, $\angle\, \alpha$ se tiene $x + \alpha = 180$ es decir son suplementarios por lo tanto el cuadrilátero ABCD es cíclico □

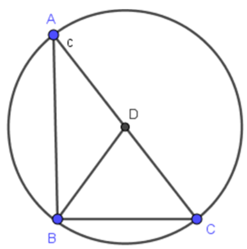
En un triángulo rectángulo



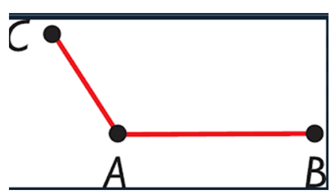

Si nos tomamos el punto medio D del lado AC y trazamos el segmento desde B a D, entonces $AD = DC$



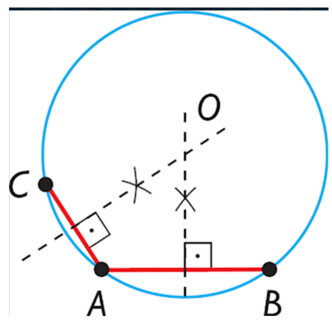

considerando AC como diámetro se cumple que $BC = BD$




Por tres puntos no colineales pasa una circunferencia, pues para ello se trazan los segmentos que unen los puntos

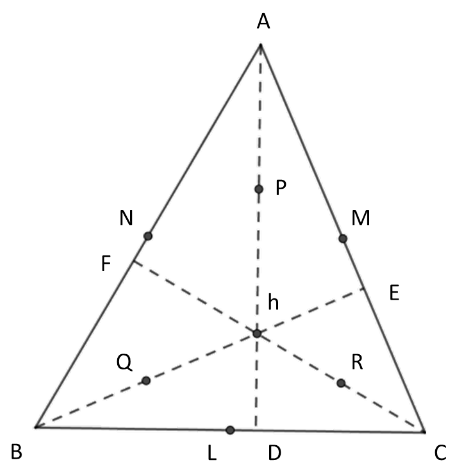



posteriormente se trazan las mediatrices de los segmentos y donde se intersecten se trendrá el centro de una circunferencia que pasará por los tres puntos

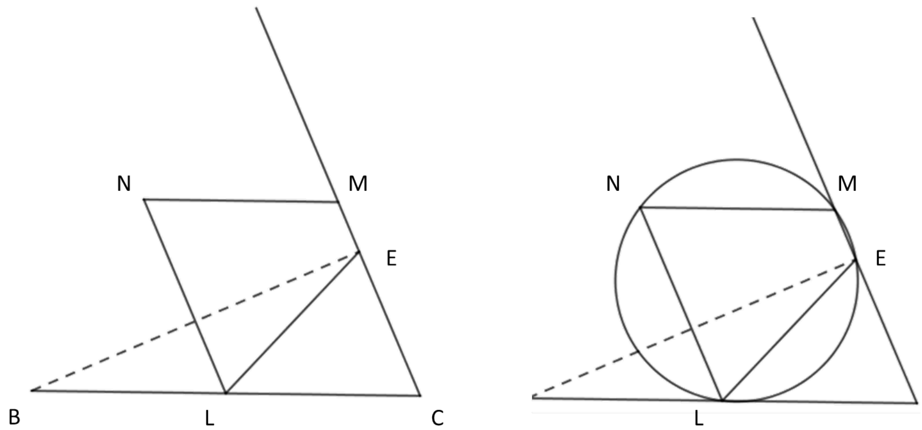



**Teorema 1.** *circunferencia de los nueve puntos.*
*Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, estan en una circunferencia*

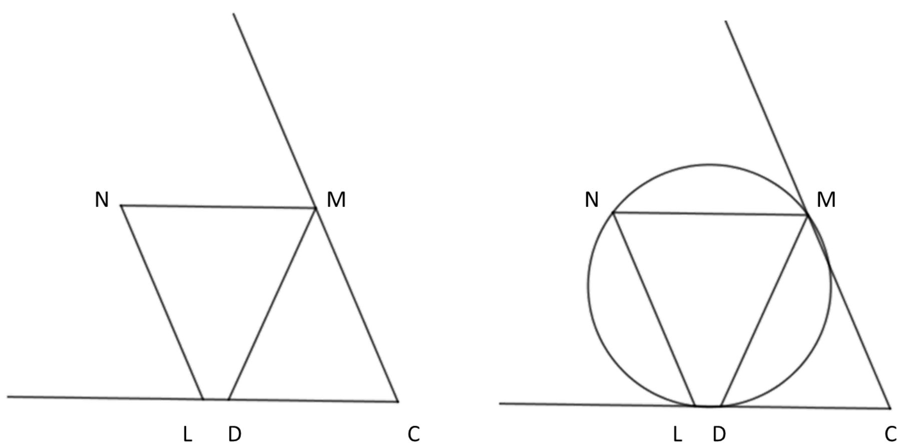
*Demostración.* En el triángulo ABC, sean N,M,L puntos medios de los lados AB,AC y BC respectivamrente, sean D,E,F los pies de las alturas y h su ortocentro, sean P,Q,R los puntos medio de los segmentos Ah, Bh y Ch respectivamente



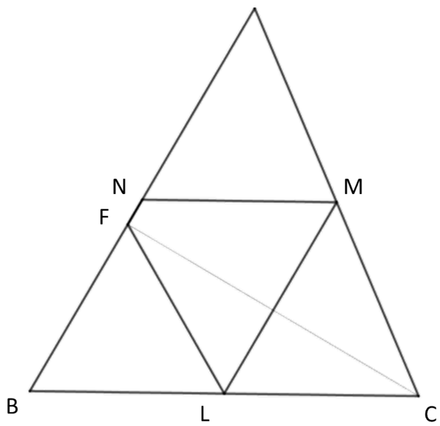

Consideramos el cuadrilátero NLEM

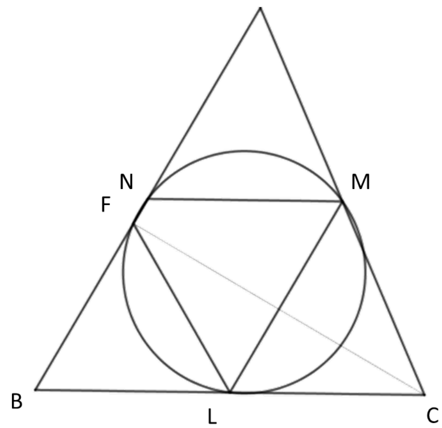



Tenemos que el triángulo BEC es rectángulo y E va al punto medio L de BC por lo que LE=LC. Por otro lado el segemento NM es paralelo a BC y en longitud NM=LC. Se tiene entonces un trapecio isósceles con lados paralelos NL y ME y lados NM, LE con longitudes iguales, por lo que éste cuadrilátero NLEM es cíclico según la proposición 1.
Consideramos el cuadrilátero NLMD



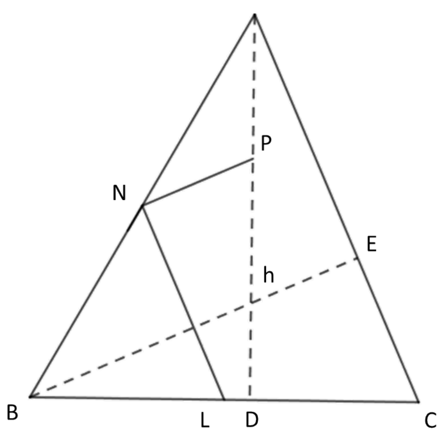

Tenemos que el triángulo MDC es isósceles y las longitudes MD y MC son iguales, y como la longitud MC es igual a la longitud NL, por lo que el trapecio NMLD es isoceles con lados paralelos NM y LD y lados iguales NL y MD, por lo que éste cuadrilátero NLMD es cíclico según la proposición 1.
Consideramos el cuadrilátero NMLF

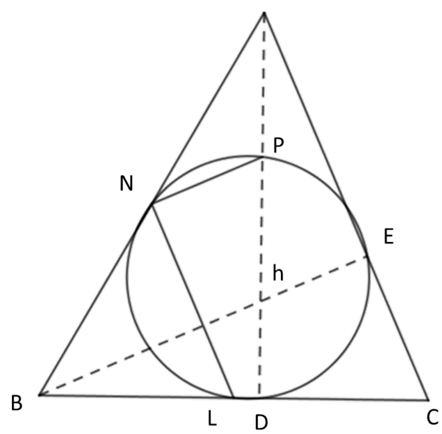


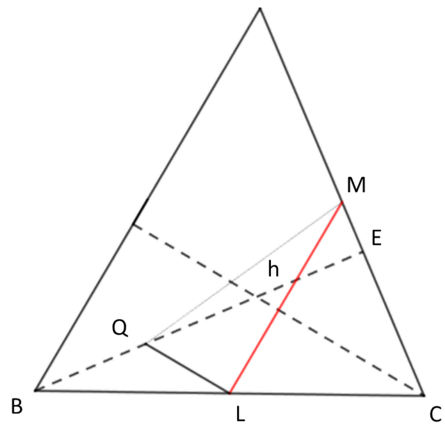

Tenemos que el triángulo CFB es rectángulo y F va al punto medio L de BC por lo que FL=LC Por otro lado el segemento NM es paralelo a BC y en longitud NM=LC. Se tiene entonces un trapecio isóceles con lados paralelos FN y LM y lados FL, MN con longitudes iguales, por lo que éste cuadrilátero NMLF es cíclico según la proposición 1.

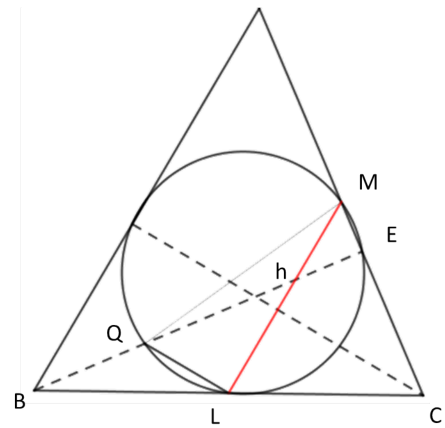
Ahora bien si P es punto medio entre el vértice A y el ortocentro h, se tiene entonces que los triángulos ANP y ABH son semejantes, por lo tanto NP es paralela a Bh lo cual implica que el ángulo $\angle PNL$ es recto y como el ángulo $\angle LDP$ es recto entonces son ángulos suplementarios. De manera que el cuadrilátero NLPD es cíclico



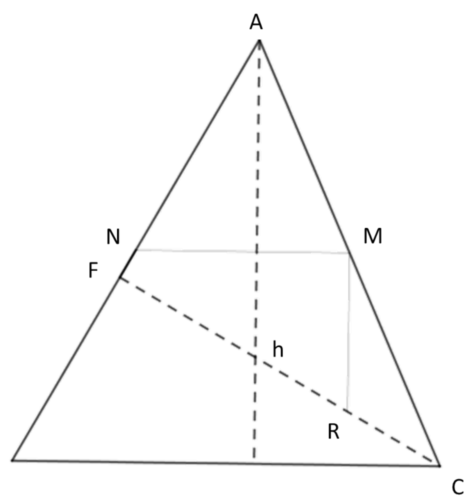



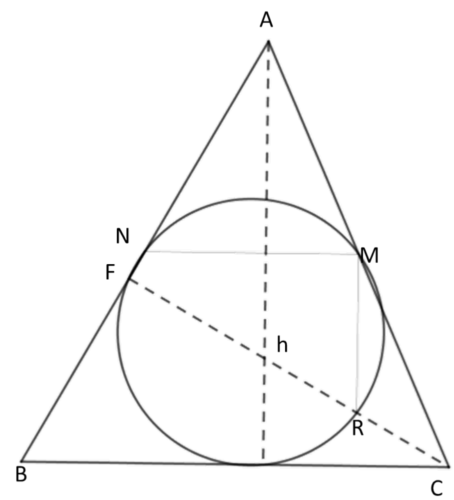

si Q es punto medio entre el vértice B y el ortocentro h, se tiene entonces que los triángulos BCH y BQL son semejantes, por lo tanto QL es paralela a Ch lo cual implica que el ángulo $\angle QLM$ es recto y como el ángulo $\angle QEM$ es recto entonces tomando QM como diámetro se tiene que el cuadrilátero QLEM es cíclico




si R es punto medio entre el vértice C y el ortocentro h, se tiene entonces que los triángulos AhC y MRC son semejantes, por lo tanto MR es paralela a Ah lo cual implica que el ángulo $\angle RMM$ es recto y como el ángulo $\angle RFN$ es recto entonces son ángulos suplementarios por lo que cuadrilátero FNRM es cíclico




□

concluimos de todo lo anterior que tenemos una circunferencia que pasa por los puntos medios L,M,N de los lados del triángulo ABC, que pasa por D,E,F los pies de las alturas del triángulo ABC y que pasa por los puntos medios de los segmentos que unen los vértices del triángulo ABC con el ortocentro. Ésta circunferencia es llamada la circunferencia de los nueve puntos.