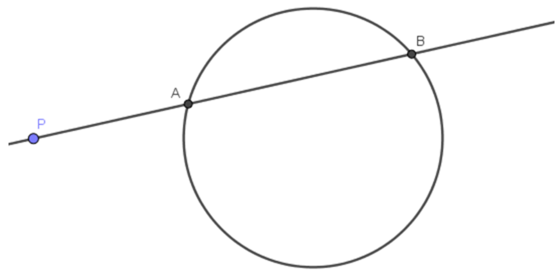
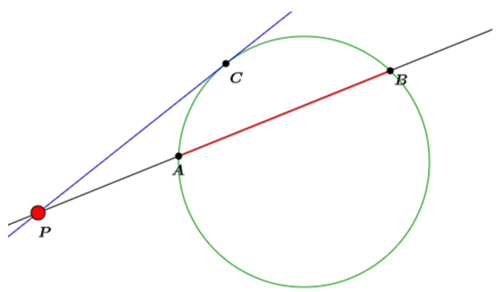
Circunferencias coaxiales

Potencia Para un punto P, una circunferencia y cualquier recta por P que corte a la circunferencia en puntos A y B (con la posibilidad de $A = B$) que $PA \cdot PB$ es constante. Esta cantidad constante se conoce como la **potencia del punto P respecto a la circunferencia**

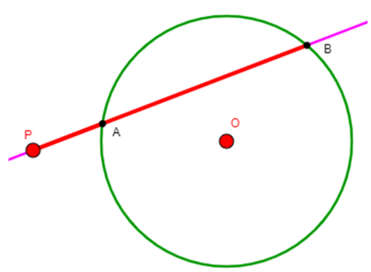


Teorema 1. *Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en C, intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces*

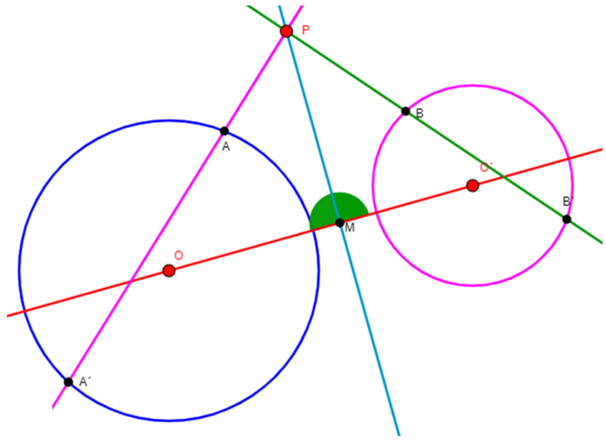
$$PC^2 = PA \cdot PB$$



Teorema 2. *La potencia de un punto P con respecto a una circunferencia de radio R es $d^2 - R^2$, donde d es la distacia de P al centro O. La potencia será positiva, cero o negativa dependiendo si P se encuentra fuera, sobre o dentro de la circunferencia.*



Teorema 3. *El lugar geométrico de los puntos P que tienen la misma potencia con respecto a dos circunferencias es una perpendicular a la línea de los centros.*



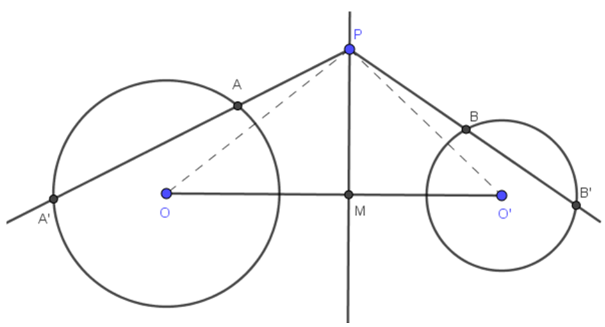
Demostración. Como el punto P tiene la misma potencia con respectoa ambas circunferencias, se tiene

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$

por tanto

$$PO^2 - R^2 = PO' - R'^2 \tag{1}$$

Por P se dibuja PM la línea perpendicular a la línea de los centros



En el triángulo rectángulo POM se tiene

$$PM^2 + OM^2 = PO^2 \tag{2}$$

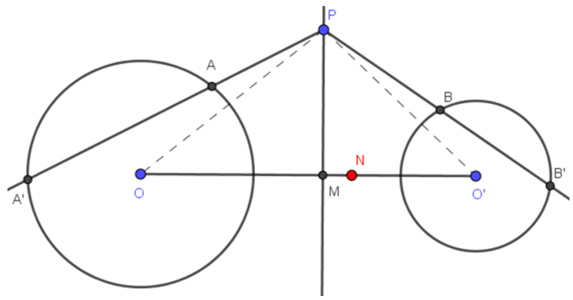
En el triángulo rectángulo PO'M se tiene

$$PM^2 + O'M^2 = PO'^2 \tag{3}$$

sustituyendo en (1), (2) y (3) se tiene

$$PM^2 + OM^2 - R^2 = PM^2 + O'M^2 - R'^2$$

por tanto
$$OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2$$
esto significa que M es potencia de ambas circunferencias.
Si N es pun punto que se encuentra sobre la línea de los centros y a la derecha de M,



se tiene suponiendo que es potencia de ambas circunferencias

$$\begin{aligned} ON^2 - R^2 &= (OM + MN)^2 - R^2 \\ &= OM^2 + 2OM \cdot MN + MN^2 - R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O'N^2 - R'^2 &= (O'M - MN)^2 - R'^2 \\ &= O'M^2 + 2O'M \cdot MN + MN^2 - R'^2 \end{aligned}$$

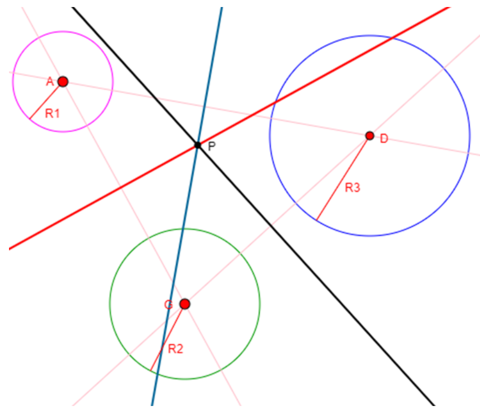
Dado que
$$ON^2 - R^2 = O'N^2 - R'^2 \qquad y \qquad OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2$$
se tiene
$$OM^2 + 2OM \cdot MN + MN^2 - R^2 = O'M^2 - 2O'M \cdot MN + MN^2 - R'^2$$
por tanto
$$\begin{aligned} OM^2 + 2OM \cdot MN - R^2 =& O'M^2 - 2O'M \cdot MN - R'^2 \\ 2OM \cdot MN =& -2O'M \cdot MN \\ OM \cdot MN =& O'M \cdot MN \\ MN(OM + O'M) =& 0 \end{aligned}$$

esto significa que $MN = 0$ ó $OM + O'M = 0$, de esto último sólo puede ocurrir $MN = 0$ y por tanto $M = N$ □

Este lugar geométrico se conoce como **eje radical** de las circunferencias. En el caso que las circunferencias se intersecten, como los puntos de intersección tienen potencia cero para ambas circunferencias, se tiene que estos puntos forman parte del lugar geométrico, por lo que en este caso el **eje radical** pasa por los puntos de intersección de las circunferencias.

Teorema 4. *Los ejes radicales de tres circunferencias, tomadas por pares, son concurrentes.*

Demostración. Sea P la intersección del eje radical de la primera $c_1(A, R_1)$ y la segunda $c_2(G, R_2)$, con el eje radical de la segunda $c_2(G, R_2)$ y tercera $c_3(D, R_3)$



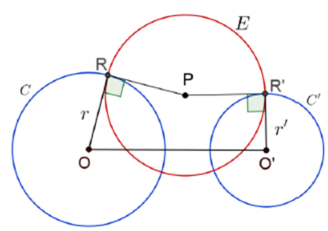
según los resultados anteriores

$$PA^2 - R_1^2 = PG^2 - R_2^2$$
$$PG^2 - R_2^2 = PD^2 - R_3^2$$

se tiene entonces $PA^2 - R_1^2 = PD^2 - R_3^2$ Por lo tanto, P tiene potencias iguales con respecto a las tres circunferencias, y entonces el eje radical de la primera y tercera también pasa por P. □

Teorema 5. *Una circunferencia ortogonal a dos circunferencias dadas tiene su centro en el eje radical de las dos circunferencias.*

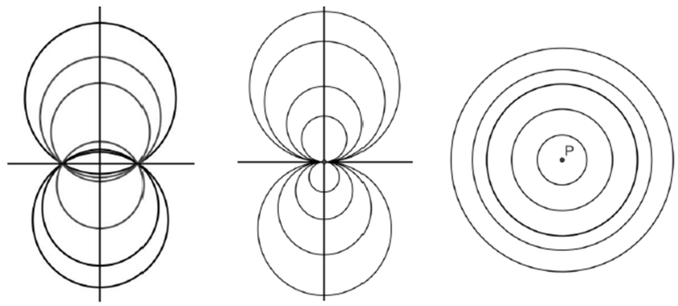
Demostración. Sean C y C' dos circunferencias no concéntricas con centro en O y O' y con radios r y r' respectivamente. Sea E una circunferencia ortogonal a las circunferencias C y C', con centro en P. Se demostrará que P está en el eje radical de las dos circunferencias. Sean R y R' las intersecciones de la circunferencia E con las circunferencias C y C', respectivamente.



Ya que la circunferencia E es ortogonal a las circunferencias C y C', sus radios a los puntos de intersección PR y PR' son tangentes a estas circunferencias respectivamente. Por tanto, $PR = PR' \Rightarrow (PR)^2 = (PR')^2$, lo que implica que la potencia de P con respecto a C y C' es la misma y P está en su eje radical. □

Familias coaxiales: definición y propiedades básicas

Definición 1. *Un conjunto de circunferencias tales que cada par de ellas tienen el mismo eje radical es una familia coaxial. Al eje radical de cada pareja se le llama el eje radical de la familia coaxial.*



Algunas de las propiedades evidentes de las familias coaxiales son:

a) El lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de todas las circunferencias de la familia es su eje radical.

b) Los centros de las circunferencias de una familia coaxial son colineales, si las circunferencias no son concéntricas.

c) Si dos puntos tienen la misma potencia respecto a tres circunferencias, entonces las circunferencias son coaxiales.

d) Dos circunferencias pertenecen a una única familia coaxial.

e) Dos circunferencias determinan una única familia coaxial.

f) Si una circunferencia tiene centro en el eje radical de la familia y es ortogonal a una de ellas, entonces es ortogonal a todas las circunferencias de la familia.

g) Si una circunferencia es ortogonal a dos circunferencias de la familia coaxial, entonces es ortogonal a todas las circunferencias coaxiales.