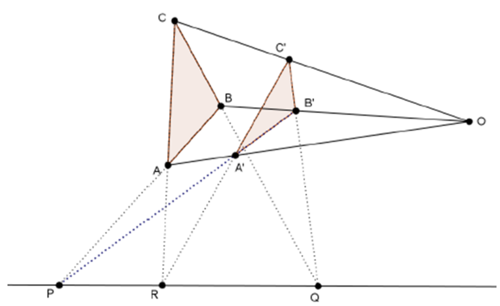
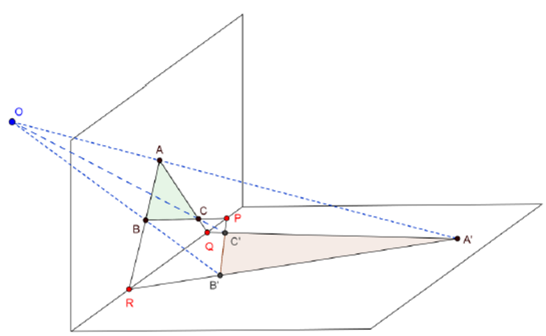
## Teorema de Desargues.

Durante su vida, Gérard Desargues (1591-1661) no disfrutó de la importante estatura como matemático que logró en los años posteriores. Esta falta de popularidad se debió en parte al reciente desarrollo de la geometría analítica por René Descartes (1596-1650) y a la introducción de Desargues de muchos términos nuevos y poco familiares.

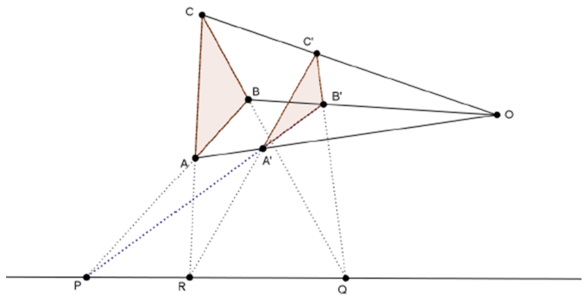
En 1648, su alumno Abraham Bosse, un maestro grabador, publicó un libro titulado Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective, que no fue popularizado hasta unos dos siglos más tarde. Este libro contenía un teorema que en el siglo XIX se convirtió en una de las proposiciones fundamentales de la geometría proyectiva. Este es el teorema que nos interesa aquí. Implica colocar dos triángulos en una posición que permita que las tres líneas que unen los vértices correspondientes sean concurrentes. Cabe destacar que cuando esto se logra, los pares de lados correspondientes se encuentran en tres puntos colineales.



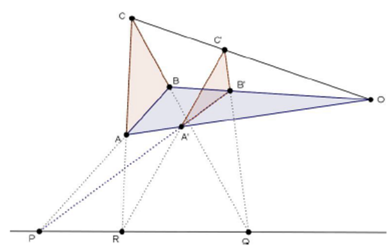




Probaremos el teorema de Desargues utilizando el teorema de Menelao.

**Teorema 1.** (*Teorema de Desargues*) *Si en un plano dos triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ están en perspectiva desde un punto $O$, los lados correspondientes se cortan en tres puntos colineales $P$, $Q$ y $R$.*

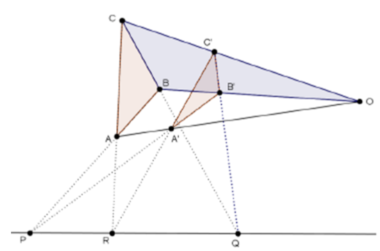



*Demostración.* Sean ABC y A'B'C' dos triángulos en perspectiva con O como centro de perspectiva. Sean P la intersección de AB y A'B', Q la de BC y B'C' y R la de CA y C'A'. Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo ABO con B'A'P como transversal se obtiene



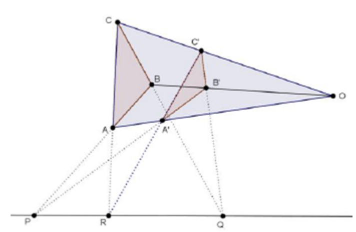
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1$$

Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo BCO con B'C'Q como transversal se obtiene



$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1$$

Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo CAO con A'C'R como transversal se obtiene



$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1$$

El producto de estas tres ecuaciones

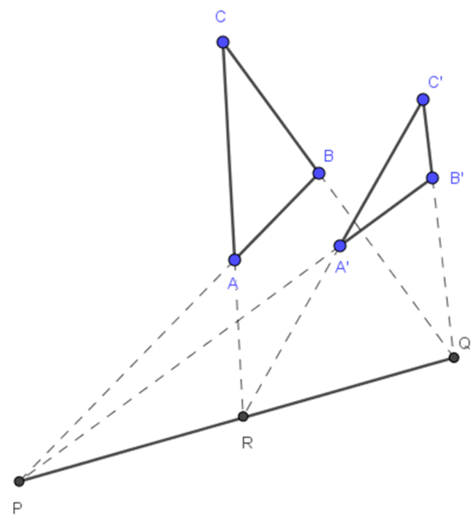
$$\left(\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A}\right)\left(\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B}\right)\left(\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C}\right) = -1$$

simplificando da como resultado:

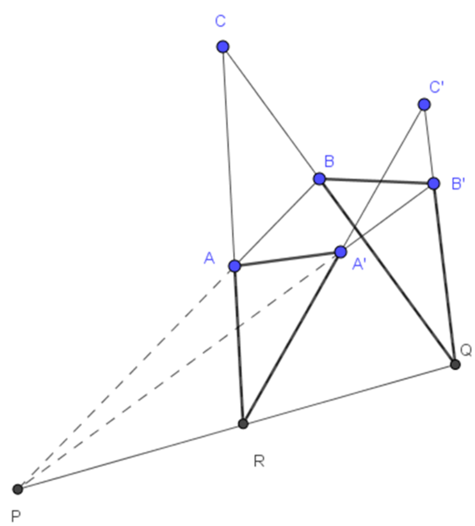
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA} = -1 \ \ \textit{lo que demuestra que } P,\ Q \textit{ y } R \textit{ son colineales.}$$

□

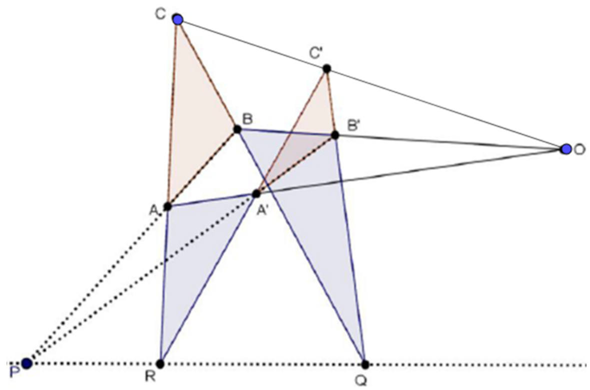
**Teorema 2.** *(Recíproco del teorema de Desargues) Sean $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ A'B'C'$ dos triángulos en el plano tales que las intersecciones de sus lados correspondientes $P$, $Q$ y $R$ son colineales, entonces los triángulos están en perspectiva.*




*Demostración.* Considérense los triángulos $\triangle\ AA'R$ y $\triangle\ BB'Q$,



Estos triángulos están en perspectiva con P como centro de perspectiva y las intersecciones de sus lados correspondientes son O, C y C', por tanto, estos puntos son colineales y los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en perspectiva con O como centro de perspectiva. A la recta en que están P, Q y R se le llama el eje de perspectiva.




$\square$