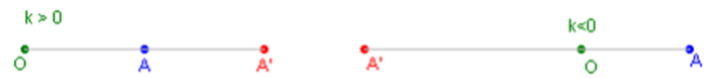
Homotecia

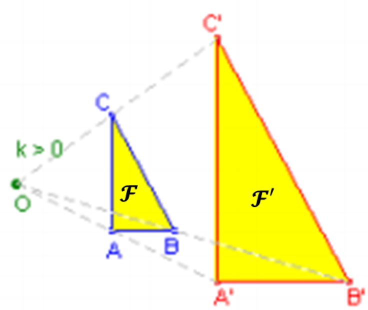
Definición 1. *Dado un punto O del plano y un número real $k \neq 0$, llamaremos homotecia de centro O y razón k, a la transformación que hace corresponder a cada punto A del plano, distinto de O, con otro punto A' alineado con O y con A y tal que:*

$$OA' = k \cdot OA$$



Decimos que dos figuras $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}'$ son homotéticas si existen un punto O y una constante $k \neq 0$ de manera que para cada punto de $A \in \mathfrak{F}$ hay un punto $A' \in \mathfrak{F}'$ tal que O, A, A' estan alineados y

$$\frac{OA'}{OA} = k$$

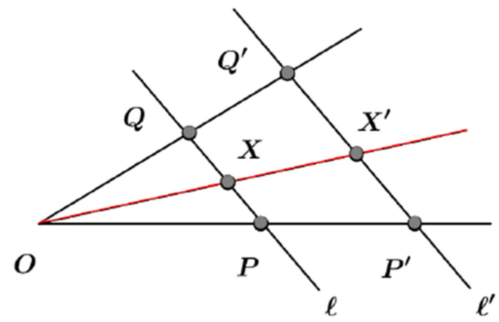


Definición 2. *El punto O se llama centro de homotecia y al valor k se le llama razòn de homotecia.*

se dice que dos figuras son homotéticas cuando se corresponden punto a punto y recta a recta, de forma que parejas de puntos están en línea recta con un punto fijo, llamado centro de homotecia y que pareja de rectas sean paralelas.

Proposición 1. *Una homotecia lleva rectas en rectas*

Demostración. Sea ℓ una recta, sean P y Q dos punto en ℓ.
Sea P' el punto que le corresponde a P bajo la homotecia y sea Q' el punto que le corresponde a Q bajo la homotecia.
Sea ℓ' la recta $P'Q'$.
Queremos demostrar que ℓ va a dar a ℓ'.
Sea $X \in \ell$ y sea X' el punto que le corresponde a X bajo la homotecia.
Basta ver que $X' \in \ell'$.



Sea O el centro de homotecia, entonces Q', P' son los puntos homotético de Q, P respectivamente. Tenemos que $\angle POX = \angle P'OX'$, además

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OX'}{OX}$$

por lo tanto los triángulos $\triangle POX$ y $\triangle B'OX'$ son semejantes y por lo tanto

$$\frac{P'X'}{PX} = k$$

de manera que $P'X'$ es paralelo a PX.
Similarmente

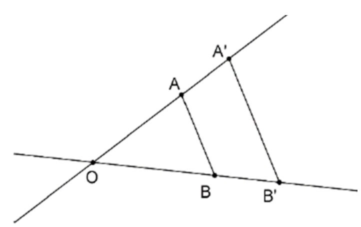
$$\frac{X'Q'}{XQ} = k$$

y $X'Q'$ es paralelo a XQ.
Ahora bien PXQ es una recta y P'X'Q' es una recta y

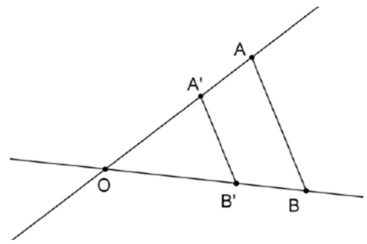
$$\frac{P'Q'}{PQ} = k$$

□

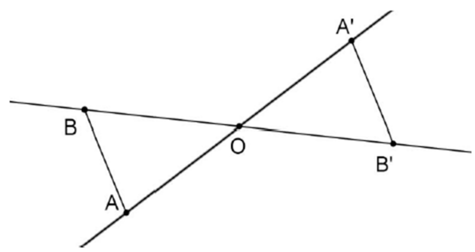
1. Si $k = 1$ entonces $displaystyle\frac{OP'}{OP} = 1 \Rightarrow OP' = OP \Rightarrow P' = P$, para todo punto P en el plano, esto es, la homotecia es la identidad
2. Si $k > 1$, entonces $A'B' = kAB > AB$ como en la figura



3. Si $k < 1$, entonces $A'B' = kAB < AB$ como en la figura



4. Sea k negativa, entonces A y A' están en diferentes semirrectas determinadas por O, al igual que B y B', ya que OA y OA' y OB y OB' tienen diferentes sentidos. Los triángulos OAB y OA'B' son semejantes por tener un ángulo igual y los dos lados adyacentes proporcionales y por tanto sus ángulos correspondientes son iguales. Esto es, también AB es paralela a A'B', ya que los ángulos alternos internos que forman con AA' y con BB' son iguales. Si $k = -1$, entonces los segmentos son de la misma longitud, pero están de distinto lado de O, en este caso se dice que la homotecia es una simetría.

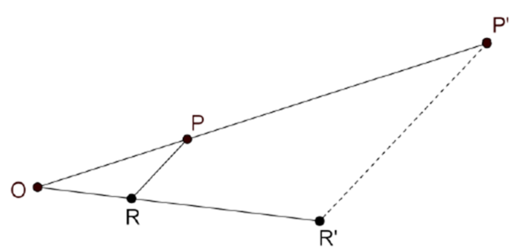


Por la semejanza de los triángulos en ambos casos se tiene que,

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

Por lo que $A'B' = kAB$ y además de que A'B' es paralelo al segmento AB.

Ejercicio Dados el centro de homotecia y el homotético de un punto cualquiera en el plano es posible determinar el homotético de cualquier otro punto del plano.



Sea O el centro de homotecia, P un punto en el plano y P' su transformado bajo una homotecia con centro en O y constante de homotecia k. Se tiene que O, P y P' son colineales. Para determinar el homotético de un punto cualquiera R que no está en la recta OP se trazan las rectas OR y PR. Por el punto P' se traza la paralela a PR. Sea R' la intersección de esta paralela con la recta OR, entonces $OR' = kOR$ como se verá a continuación.

Se tiene que que O, P y P' son colineales y ?

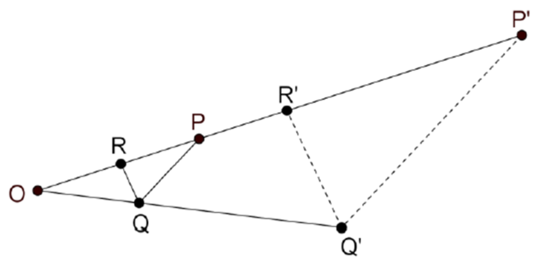
$$\frac{OP?}{OP} = k$$

Además, ya que PR es paralelo a P'R', por Thales se tiene

$$\frac{OR'}{OR} = k$$

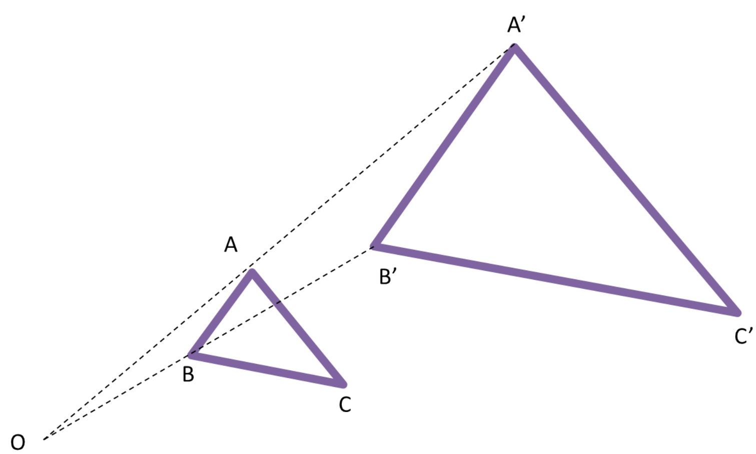
y ya que también O, R y R' son colineales por construcción, se tiene $kOR = OR'$

Ejercicio En el caso en que R esté en la recta O, P y P', se construye el homotético de un punto cualquiera Q que no esté en la recta y después se procede como en el anterior caso.



Proposición 2. *Dados dos triángulos semejantes de lados paralelos entonces existe una homotecia tal que transforma un triángulo en el otro*

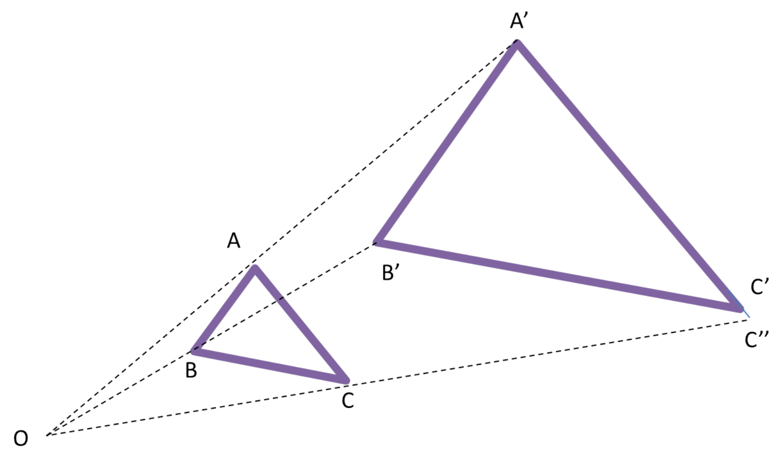
Demostración. Sean ABC y A'B'C' dos triángulos semejantes de lados paralelo



Se tiene entonces que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$$

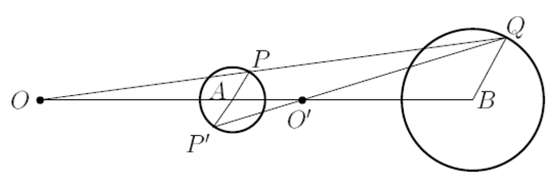
donde k es la constante de semejanza de los dos triángulos.
Supongamos que $k \neq 1$, sea O entonces el punto de intersección de AA' y BB'.
Considérense los triángulos OAB y OA'B', pero como AB es paralelo a A'B', se tiene por el teorema de Tales que, $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$ y $\triangle\ OAB \approx \triangle\ OA'B'$, por el segundo teorema de semejanza (un ángulo igual y lados adyacentes proporcionales). Pero como además $\dfrac{A'B'}{AB} = k$?, por la semejanza, se tiene que $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{A'B'}{AB} = k$. Además, por construcción, O, A y A' y O, B y B' son colineales. Por tanto, la homotecia con centro en O y constante de homotecia k, que es la constante de semejanza, lleva A en A' y B en B'.
Falta por demostrar que C' es el homotético de C bajo la misma homotecia.
Para ello considérese la recta OC y supóngase que no pasa por C'. Sea C" la intersección de B'C' con OC,



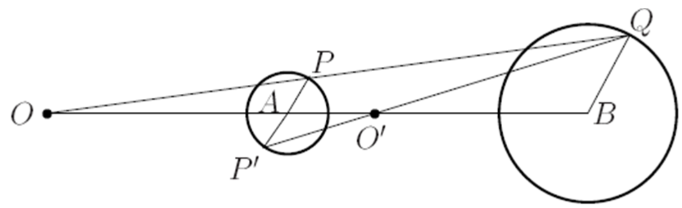
entonces por el teorema de Tales $\dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC''}{OC} = k$ y $\triangle\ OBC \approx \triangle\ OB'C''$ de donde se tiene que, $\dfrac{B'C''}{BC} = k$. Pero también $\dfrac{B'C'}{BC} = k$?, de donde B'C' = B'C" y C' = C" y los dos triángulos son homotéticos. □

Proposición 3. *Dos circunferencias de centros y radios distintos, son figuras homotéticas*

Demostración. Sean (A,a) y (B,b) las dos circunferencias ((A,a) denota la circunferencia con centro en A y radio a)



Consideramos Q un punto sobre (B,b) y PP' un diámetro de (A,a) paralelo a BQ. Sean O el punto de intersección de la recta por P y Q con la recta de los centros (esto es la recta que pasa por A y B) y O' la intersección de P'Q con la recta de los centros



Como los triángulos OAP y OBQ son semejantes, por lo que

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OB} = \frac{AP}{BQ} = \frac{a}{b}$$

También los triángulos O'AP' y O'BQ son semejantes, por lo que

$$\frac{O'P'}{O'Q} = \frac{O'A}{O'B} = \frac{AP'}{BQ} = \frac{a}{b}$$

Encontramos entonces dos puntos O y O' sobre la recta de los centros, con la propiedad de que

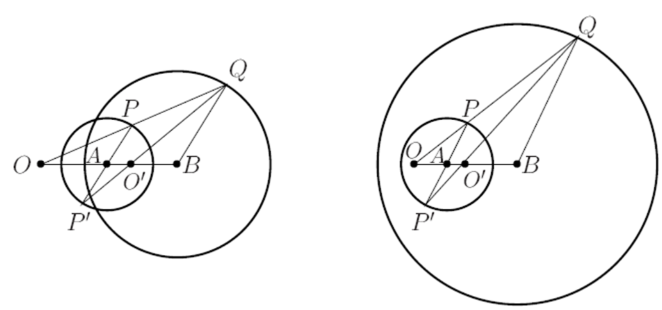
$$\frac{OA}{OB} = \frac{a}{b} \quad y \quad \frac{O'A}{O'B} = \frac{a}{b}$$

y éstos se proponen como centros de homotecia.
Por otro lado, para cada punto Q de la circunferencia (B,b), hemos encontrado puntos P y P' sobre la circunferencia (A,a) que cumplen

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{O'P'}{O'Q} = \frac{a}{b}$$

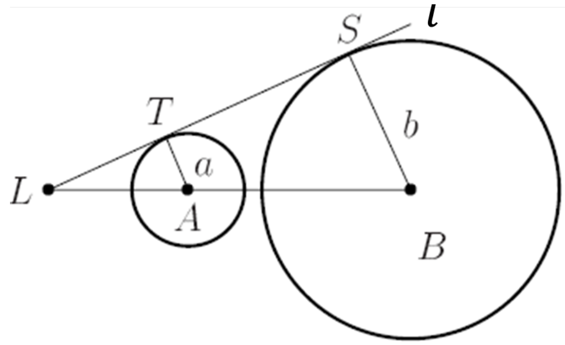
lo que establece que (A,a) (B,b) son homotéticos desde O y O' □

Las circunferencias pueden o no intersectarse. También una puede estar contenida en la otra.
Para localizar a los puntos O y O', como lo garantiza el resultado anterior, basta que A y B sean diferentes y que $a \neq b$



Corolario 1. *Cada tangente común a (A,a) y (B,b) pasa por un centro de homotecia.*

Demostración. Supongamos que ℓ es una tangente común esterna a las circunferencias (A,a) y (B,b), en los puntos T y S respectivamente, y que ℓ intersecta a la recta de los centros en L.

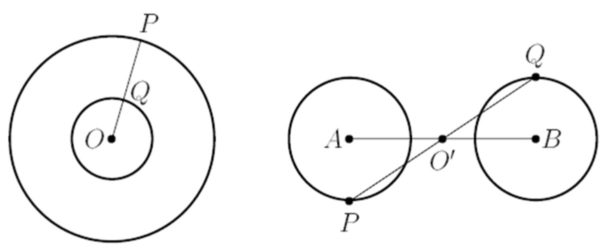


Tenemos que los triángulos rectángulos LAT y LBS son semejantes, por lo que

$$\frac{LT}{LS} = \frac{LA}{LB} = \frac{a}{b}$$

Luego $L = O$, ya que solamente existe un punto que divide externamente al segmento AB en la razón $\frac{a}{b}$.
Análogamente, una tangente interna común a las circunferencias debe pasar por el centro de homotecia interno. ☐

Si las circunferencias son concéntricas, el centro común es también centro de homotecia, y es el único, por lo que podemos considerarlo como centro de homotecia interno y externo.
Si las circunferencias son del mismo radio, el único centro de homotecia es el punto medio del segmento que une los centros, la razón de homotecia en este caso es $k = -1$



Si las circunferencias son tangentes, el punto de contacto es centro de homotecia interno, si las circunferencias son tangentes internas, el punto de contacto es centro de homotecia externo