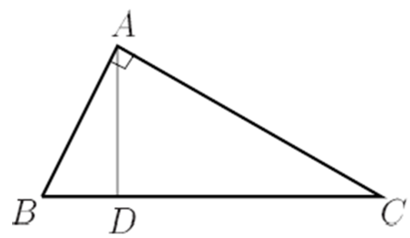
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se conoce como la **hipotenusa** y a los lados adyacentes al ángulo recto como los **catetos** del triángulo.

Lema 1. *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él.*

Demostración. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice A y sea AD la altura sobre la hipotenusa BC



1. Tenemos que $\triangle\ ABC$ es semejante a $\triangle\ DBA$ ya que ambos son triángulos rectángulos y el ángulo $\angle\ ABC$ es común. La semejanza entre los triángulos $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ DBA$, nos da
$$\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{AB}$$
por tanto,
$$AB^2 = DB \cdot CB \tag{1}$$

2. También los triángulos rectángulos $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ DAC$ son semejantes, ya que ambos son triángulos rectángulos y en éstos el ángulo $\angle\ BCA$ es común. La semejanza entre los triángulos $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ DAC$, nos da
$$\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$$
por tanto,
$$CA^2 = CD \cdot CB \tag{2}$$

3. También los triángulos rectángulos $\triangle\ ABD$ y $\triangle\ ADC$ son semejantes, ya que ambos son triángulos rectángulos y en éstos los ángulos $\angle\ ABD = \angle\ DAC$. La semejanza entre los triángulos $\triangle\ ADB$ y $\triangle\ ADC$, nos da
$$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD}$$
por tanto,
$$AD^2 = BD \cdot DC \tag{3}$$

□

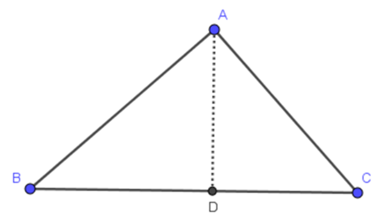
Al sumar (**??**) y (**??**) se tiene

$$AB^2 + CA^2 = DB \cdot CB + CD \cdot CB = (CD + DB) \cdot CB = CB^2$$

Esto se puede resumir en el siguiente,

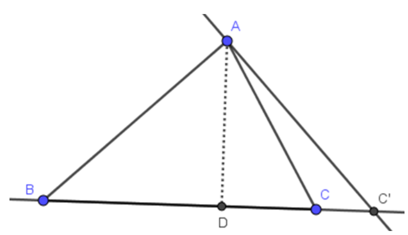
Teorema 1. *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Teorema 2. *Recíproco del teorema de Pitágoras.*
Sea $\triangle ABC$ un triángulo con ángulos en B y C menores de 90 y sea D el pie de la altura de A sobre BC. Si $AD^2 = BD \cdot DC$ entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.



Demostración. Tenemos que

1. Trazamos la perpendicular a AB por A
2. Ésta corta a BC en C'
3. ABC' es rectángulo



se tiene entonces que

$$AD^2 = BD \cdot DC'$$

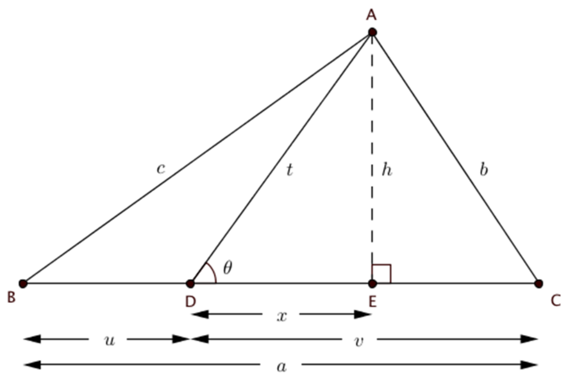
y por hipótesis

$$AD^2 = BD \cdot DC$$

por tanto $DC = DC'$ y en consecuencia $C = C'$ y el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo □

En geometría, el teorema de Stewart produce una relación entre las longitudes de los lados y la longitud ceviana de un triángulo. Puede probarse a partir de la ley de los cosenos, así como por el famoso teorema de Pitágoras. Su nombre es en honor al matemático escocés Matthew Stewart, quien publicó el teorema en 1746 cuando se creía que era un candidato para reemplazar a Colin Maclaurin como profesor de matemáticas en la Universidad de Edimburgo.

Teorema 3. *Teorema de Stewart.*
En un triángulo ABC, Sea D un punto en el lado BC, $AB = b$, $BD = u$, $DC = v$, $AD = t$. El teorema de Stewart establece que en este triángulo, la siguiente ecuación es válida:



$$t^2 = \frac{b^2u + c^2v}{u+v} - uv$$

Demostración. Segíun la figura, se tiene

$$\begin{aligned}
t^2 &= h^2 + x^2 \\
b^2 &= h^2 + (v-x)^2 \;\Rightarrow\; b^2u = h^2u + uv^2 - 2uvx + ux^2 \\
c^2 &= h^2 + (u+x)^2 \;\Rightarrow\; c^2v = h^2v + vu^2 + 2uvx + vx^2
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
b^2u + c^2v &= h^2u + uv^2 - 2uvx + ux^2 + h^2v + vu^2 + 2uvx + vx^2 \\
&= (u+v)(h^2 + uv + x^2) \\
&= (u+v)(t^2 + uv) \\
&= a \cdot (t^2 + uv)
\end{aligned}$$

$\square$