Lógica Matemática III. Tarea-Examen II.

Prof. Rafael Rojas Barbachano.
Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.

26 - 04 - 2017

1. Aritmetización del Metalenguaje.

1.1 (2 pts.)

- Prueba que ***TERM*** es una relación recursiva.
- Prueba que ***FORM*** es una relación recursiva.

Usa recursión por curso de valores.

2. Operador μ.

2.1 (1 pto.)

- Prueba que $\star$ es asociativa pero no conmutativa.
- Explica detalladamente que es lo que pasa si en la definición de $\star$ se utiliza la función ld en lugar de lg.

2.2 (1 pto.) Sean $h_1, ..., h_m : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ funciones recursivas y $R_1, ...R_m \subseteq \mathbb{N}^n$ relaciones recursivas ajenas dos a dos, tales que: $\bigcup_{i=1}^{m} R_i = \mathbb{N}$

Muestra que f es recursiva, donde $f : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ esta definida de la siguiente manera.

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} h_1(\vec{x}) & \text{Si} \quad R_1(\vec{x}) \\ h_2(\vec{x}) & \text{Si} \quad R_2(\vec{x}) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ h_m(\vec{x}) & \text{Si} \quad R_m(\vec{x}) \end{cases}$$

2.3 (1 pto.) Muestra que el operador μ preserva representabilidad de funciones recursivas en AP.

3. Aritmética de Peano.

3.1 (2 pts.) Prueba los siguientes enunciados.

- Para cualquier número natural n.
  $\vdash_{AP} x \leq \bar{n} \ \longleftrightarrow \ x = 0 \ \lor \ \cdots \ \lor \ x = \bar{n}$
- Para cualquier número natural $n > 0$ y cualquier fórmula bien formada α.
  $\vdash_{AP} \forall x(x \leq \bar{n} \to \alpha(x)) \ \longleftrightarrow \ \alpha(0) \ \& \ \alpha(\bar{1}) \ \cdots \ \alpha(\overline{x-1})$

Usa inducción sobre n en el metalenguaje.

4. Random

4.1 (1 pto.) Demuestra que toda relación recursiva es expresable en AP.

4.2 (1 pto.) Sea T una teoría en un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}_\tau$ tal que $\{c_0, f_s\} \subseteq \mathscr{L}_\tau$. Decimos que T es ω-consistente si para toda formula $\varphi \in \mathscr{L}_\tau^1$, si $\vdash_T \neg\varphi(\bar{n})$ para cualquier úmero natural n, entonces no es el caso que $\vdash_T \exists x\varphi(x)$.

Muestra que si T es ω-consistente, entonces T es concistente.

4.3 (2 pts.) Sea T una teoría en un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}_\tau$ tal que $\{c_0, f_s\} \subseteq \mathscr{L}_\tau$. Decimos que T es ω-completa si para toda formula $\varphi \in \mathscr{L}_\tau^1$, si $\varphi \in T$ para cualquier número natural n, entonces $\forall x\varphi(x) \in T$.

Muestra que si T es una teoría ω-concistente y ω-completa en $\mathscr{L}_{AP}$ y si $AP \subseteq T$, entonces $T = Th(\mathfrak{N})$.