Lógica Matemática III. Tarea-Examen III.

Prof. Rafael Rojas Barbachano.
Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.

18 - 05 - 2017

1. Gödel - Rosser

1.1 (2 pts.) Demuestra el teorema de Gödel - Rosser generalizado

2. Diagonalización

2.1 (2 pts.) Sea $\{f_s, f_+, f_., c_0\} \subseteq \rho$ y $\mid \rho \mid \leq \aleph_0$. Sea $T \subseteq \mathscr{L}_\rho^0$ recursivamente axiomatizable en la que toda relación, función recursiva es expresable, representable en T.

Sea $\alpha(v_0, v_1)$ una fórmula que expresa a PRU en T. Definimos $\psi(v_1) \leftrightharpoons \exists v_0 \alpha(v_0, v_1)$. Sea $\gamma \in \mathscr{L}_\rho^0$ el enunciado resultante de aplicar el lema diagonal a $\neg\psi(v_1)$,con la propiedad de que.

$$T \vdash \neg\psi(\ulcorner\gamma\urcorner) \longleftrightarrow \gamma$$

- Prueba que si T es ω - concistente entonces T es incompleta.

3. Random

3.1 (2pts.) Tomemos una enumeración de los enunciados de AP, $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$. Definimos recusrivamente la función Σ.

$$\Sigma_0 = AP$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{Si es consistente} \quad \Sigma_n \cup \{\alpha_n\} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Sea

$$\Delta = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$$

- ¿Δ es consistente y completa? Argumenta detalladamente tu respuesta.
- En el caso de ser Δ consistente y completa, ¿Contradice el teorema de Gödel? De ser este el caso argumenta detalladamente, de lo contrario demuestralo.

3.2 (2 pts.) Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$, decimos que son recursivamente separables sii hay $C \subseteq \mathbb{N}$ recursivo, tal que $A \subseteq C$ y $B \subseteq \mathbb{N} \setminus C$.
Definimos:

$$T = \{g_2(\varphi) : AP \vdash \varphi \quad y \quad \varphi \in \mathscr{L}^0_{AP}\}$$
$$R = \{g_2(\psi) : AP \vdash \neg\psi \quad y \quad \psi \in \mathscr{L}^0_{AP}\}$$

- Prueba que T y R no son separables.
- Concluye que el conjunto de teoremas de AP no es recursivo.

3.3 (2 pts.) Demuestra que si Σ es un conjunto recursivo de enunciados sintácticamente completo, entonces el conjunto de teoremas de Σ es recursivo.
¿Cómo probarías el primer teorema de incompletud de Gödel usando los ejercicios 3.2 y 3.3 de esta tarea?