I. Argumento de Gödel.

a) Escenario Histórico.

Geometrías No–Euclideanas. (2a. Gran Crisis de la Matemática)

Euclides 300 a.C.(?) "Elementos de Geometría" 13 volúmenes.

El descubrimiento de las G. no–E se debió al hecho de tratar de demostrar el 5o. Postulado de Euclides. El postulado era poco o nada simple e intuitivo en la Geometría. Se dice que Euclides mismo fué el primero en tratar de no usarlo, lo usa hasta la proposición 29.

El descubrimiento de las G. no–E se debe al suponer la negación del 5o. Postulado. Intervienen en el descubrimiento,

- Gauss, Karl Frederich (1777-1855), NO publica por terror, pánico...
- Bolyai, Johan (1802-1860) en 1823 pero publicada en 1832.
- Lobachevsky, Nicolai Ivanovich (1793-1856) de 1826 y 1829-1840

¿Cómo saber si el suponer la negación de un postulado (en nuestro caso, el 5o.) no llevará tarde que temprano a una contradicción?

R: Dar un “mundo” donde sea posible, lo que hoy llamamos una interpretación en la cual los axiomas sean verdaderos. Obteniendo con ello una prueba de *Consistencia.*

Intervienen en las pruebas de consistencia de las G. no-E:

- Cayley, A. (1821-1895)
- Beltrami, E. (1835-1895)
- Klein, F. (1849-1925)
- Poincaré, H. (1854-1912)

Y

- Riemann, B. (1826-1866)

OjO:

1. Solamente se tiene pruebas relativas –relativas a otra teoría– de Consistencia.

2. Hasta aquí, se ha probado que el postulado **V** no se puede probar a partir de los otros. Pero,

3. La independencia de un postulado, no se dá si no hasta que se dan pruebas de consistencia tanto de él, como de su negación.

4. Lo que es muy importante con todo lo hecho hasta aquí es que:

∴ El concepto de verdad es Relativo.

Aritmetización del Análisis. (3a. Gran Crisis de la Matemática)

Crisis provocada por Newton y Leibnitz por el *“mal–uso”* de los Infinitesimales.

Resuelta por:

- Weirstrass
- Cauchy

Y

- Cantor y Dedekind.

Todo el edificio de la matemática queda basado en los números Reales y por tanto en la Aritmética.

Surgimiento de las paradojas y dudas acerca de la verdad matemática.
(4a. Gran Crisis de la Matemática)

a). *Programa Logicista:*

La matemática no es más que un capítulo de Lógica, es una parte de la lógica.

- Fregue, F. (1848-1825).
- Roussell, B. (1872-1970) & Whitehead, A. N.:
  En *Principia Matematica (1910-13),* establecen su *Teoría de Tipos*. Pero tiene que suponer un axioma, el de "reductibilidad" el cual ocaciona que se venga abajo su teoría.
- Peano, J. (1858-1932).

b). *Programa Intuicionista o Constructivista:*

Es hasta hoy el más seguro, pero es muy lento y se dedican a reconstruir lo hecho por los otros -**no** hay grandes aportaciones.

- Kroneker, L. (1823-1891)
- Brouwer, L. (1881-1966)
- Weyl, H. (1885-1965)
- Poincarè, H. (1854-1912)

- Borel, F. (1871-1956)
- Lebesgue, H. 1875-1941)

c). *Programa Formalista:*

Todo conocimiento matemático (área de ...) debe de ser **axiomatizada** en una teoría la cual debe de ser **completa** y **consistente** y, de preferencia, con sus **axiomas independientes**.

Las pruebas de consistencia tienen que ser **absolutas** y **no relativas**: Hay que encontrar un enunciado (p. e. de la aritmética formalizada) digamos σ, tal que bajo la interpretación usual éste fuera **falso** y **no** sea demostrable en dicha formalización:

$$AxArit \nvdash \sigma.$$

Por ejemplo, probar que:

$$AxArit \nvdash (1 = 2) \text{ o } AxArit \nvdash s(0) = s(s(o)).$$

Verdad $\rightleftharpoons$ Demostrabilidad

Hibert, D. (1862-1943):

- En 1900 publica una Axiomatización para los números reales:
  Un Campo Ordenado Arquimediano Maximal
- En el congreso Internacional de Matemáticos, París, FRA. 1900, presenta 23 problemas a resolver, el segundo llamado:
  "La Consistencia de los axiomas aritméticos"
  Aquí, leer: aritmética $\rightleftharpoons$ teoría de los números reales.

En resumen, el trabajo que se tiene que desarrollar es:

Solo usando procedimientos **finitistas**. (P.E. NO usar AE)

1. Dar una axiomatización para la aritmética, $AxArit$, junto con una prueba de consistencia absoluta.

2. Para cualquier enunciado σ, escrito en un lenguaje formal adecuado, se debe tener,

σ es verdad en la Aritmética (informal) syss $AxArit \vdash \sigma$.

Si se lograra esto:

1. **EXISTENCIA** se entendería como Posibilidad Lógica: **CONSISTENCIA**

POICARE (1905):
"...en matemáticas, la palabra existir NO puede tener más que un

significado, significa *exento de contradicción."*

2. VERDAD $\rightleftharpoons$ DEMOSTRABILIDAD

Gödel (1931): ¡¡¡ NO !!!

b) Heurística.

Kurt Gödel (1906-1978)

Gödel piensa que si la respuesta fuera afirmativa, entonces “La Matemática se volvería una máquina hacedora de teoremas” y creía que era mucho más que eso.

A grosso modo lo que prueba es lo siguiente: Si $AxArit$ es un conjunto de axiomas formales para la aritmética, escritos en un lenguaje formal (de 1er. órden), donde hay un método efectivo para decidir cuando un enunciado es un axioma o no lo es, entonces

1. $CON(AxArit) \Rightarrow$ Hay un enunciado σ tal, que $AxArit \nvdash \sigma$ y $AxArit \nvdash \neg\sigma$.
Es decir, bajo la suposición de la consistencia de la Aritmética (formalizada), ésta es incompleta.

2. $CON(AxArit) \Rightarrow \left[AxArit \nvdash con(AxArit) \right]$.
Es decir, bajo la suposición de la consistencia de la Aritmética (formalizada), no se puede probar su propia consistencia.

Gödel se basa en dos ideas para llevar a cabo su prueba. La segunda viene en ayuda para llevar a cabo la primera. Esta es,

I. La paradoja del Mentiroso.

Una de las formas de la paradoja es,

“Yo miento”

o, una variante,

“Esta oración es falsa”

Gödel la piensa de la siguiente manera,

“Este enunciado es indemostrable, en la aritmética (formalizada)”

o bien,

“Yo soy indemostrable, en la aritmética (formalizada)”

Habrá pues, lograr escribir un enunciado, digamos σ_G, en un Lenguaje formal (de primer Orden), tal que al interpretarlo diga:

“El enunciado σ_G es indemostrable, en $AxArit$”.

Y así tendríamos que,

1. Si $AxArit \vdash \sigma_G$, entonces σ_G es falso.
Es decir, se demostraría algo falso.

2. Si $AxArit \nvdash \sigma_G$, entonces σ_G es verdadero.
Es decir, dejaríamos de probar algo verdadero.

Si se tuviera **1**, entonces $AxArit$ sería **inconsistente**. Y

Si se tuviera **2**, entonces $AxArit$ sería **incompleta** (semánticamente).

II. **La paradoja de Richard**.

- Richard en 1905 y Berri en 1906

El argumento de la paradoja va más o menos así:

1. Algunas propiedades de los números naturales pueden definirse en el español (solo $\aleph_0$ de las $2^{\aleph_0}$ que hay), consideremos a todas ellas pero sin repetirlas.

2. Demos un orden a las propiedades, o mejor dicho, las definiciones, por ejemplo por orden lexicográfico. Así tenemos una lista (numerable) de todas ellas:

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots$$

3. Definición. Diremos que un número $k \in \mathbb{N}$ es *Richardiano* syss $P_k(k)$ es falso. O si se prefiere, k **no** tiene la propiedad P_k

4. La propiedad de "ser richardiano" es una propiedad de los números naturales y está escrita en español.

5. Como en la lista dada en **2**. están **todas** las propiedades que se pueden escribir en español, hay un $r \in \mathbb{N}$ tal, que $P_r(x)$ es la definición de "x es richardiano".

6. ¿El número r es richardiano?

Se tiene que

r es richardiano syss r no es richardiano

Lo cual es absurdo.

La paradoja desaparece al darse cuenta uno de que la propiedad "ser richardiano" pertenece al Metalenguaje y no al lenguaje objeto (¿por qué?).

c) Argumento de Gödel.

Supongamos que tenemos una formalización de la aritmética, es decir, tenemos un conjunto de axiomas, digamos $AxArt$, enunciados de un lenguaje formal, llamemosle $\mathcal{L}_{Art}$. Supongamos también que éste es numerable. La idea subyacente a la prueba de Gödel va en paralelo con el argumento de Richard y es –más o menos– el siguiente,

1. Considere el conjunto,

$$\mathcal{L}^1_{Art} = \left\{ \varphi(x) \in FRM_{Art} \ / \ x \text{ es la única variable libre de } \varphi \right\}$$

2. Damos un buen órden a todas las fórmulas de $\mathcal{L}^1_{Art}$. Digamos,

$$\varphi_0(x_0),\ \varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2), \ldots$$

3. Definición. Sea $k \in \mathbb{N}$. Diremos que el número k es *Gödeliano* syss

$$AxArit \nvdash \varphi_k\left(x_k / \overline{k}\right)$$

donde $\overline{k}$ es el símbolo formal para el número k.

4. La propiedad de "ser gödeliano", la denotaremos por $\mathcal{G}$, pertenece al Metalenguaje. Tenemos que

$$\mathcal{G} = \left\{ k \in \mathbb{N} \ / \ k \text{ es gödeliano} \right\} = \left\{ k \in \mathbb{N} \ / \ AxArit \nvdash \varphi_k\left(x_k / \overline{k}\right) \right\}$$

es una propiedad de los números naturales $(\mathbb{N})$, pertenece a la aritmética informal y permanece –no cambia– mientras no se alteren ni los axiomas $(AxArit)$, ni la numeración dada en **2**.

Supongamos ahora que hay una fórmula $\gamma(x) \in \mathcal{L}^1_{Art}$ que funciona (diremos más adelante que γ *expresa* o *representa* a $\mathcal{G}$, en $AxArit$) de la siguiente manera,

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que,

a. Si $n \in \mathcal{G}$, entonces $AxArit \vdash \gamma\left(x / \overline{n}\right)$..$(*)$

b. Si $n \notin \mathcal{G}$, entonces $AxArit \vdash \neg\gamma\left(x / \overline{n}\right)$.......................................$(**)$

5. Puesto que $\gamma(x) \in \mathcal{L}^1_{Art}$, hay un $g \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma(x) \leftrightharpoons \varphi_g(x_g)$.
Así tenemos,

$$\begin{aligned} \varphi_g\left(x_g / \overline{g}\right) &\leftrightharpoons g \text{ es gödeliano} \\ &\leftrightharpoons AxArit \nvdash \varphi_g\left(x_g / \overline{g}\right) \\ &\leftrightharpoons \text{"Soy indemostrable, en } AxArit\text{"} \end{aligned}$$

Pongamos $\sigma_g \leftrightharpoons \varphi_g\left(x_g / \overline{g}\right)$.

6. Bajo la **suposición** de la *Consistencia* de $AxArit$, abreviado $CON(AxArit)$, tenemos:

a. Si $AxArit \vdash \sigma_g$

$$
\begin{array}{lll}
\Rightarrow & AxArit \nvdash \neg\sigma_g & CON(AxArit) \\
\Rightarrow & g \in \mathcal{G} & (**) \\
\Leftrightarrow & AxArit \nvdash \sigma_g & \text{Def. } \mathcal{G}
\end{array}
$$

$$\therefore\ AxArit \nvdash \sigma_g$$

Puesto que la "interpretación" de σ_g es "soy indemostrable", resulta ser un enunciado verdadero, pero no-demostrable en $AxArit$.

b. Si $AxArit \vdash \neg\sigma_g$

$$
\begin{array}{lll}
\Rightarrow & AxArit \nvdash \sigma_g & CON(AxArit) \\
\Leftrightarrow & g \in \mathcal{G} & \text{Def. } \mathcal{G} \\
\Rightarrow & AxArit \vdash \sigma_g & (*) \\
\Rightarrow & AxArit \nvdash \neg\sigma_g & CON(AxArit)
\end{array}
$$

$$\therefore\ AxArit \nvdash \neg\sigma_g$$

Con esto tenemos que,

$CON(AxArit) \Rightarrow \sigma_g$ es un *Indecidible* para $AxArit$

Y por tanto,

$CON(AxArit) \Rightarrow AxArit$ es Incompleta

Resumiendo. Para obtener el resultado, evitamos la paradoja de Richard, suponiendo que el conjunto $\mathcal{G}$ es **representable** en $AxArit$.

El Trabajo consistiría en:

1. Ciertas propiedades o relaciones (y operaciones) metalingüísticas —como ser teorema, ser una prueba, ser consecuencia de …, ser axioma lógico, ser axioma propio, ser término, etc— deberán ser traducibles a propiedades o relaciones aritméticas.

Aquí la respuesta es más o menos clara, lo que hay que hacer es **codificar**. Si a cada símbolo, a cada sucesión de símbolos y a las sucsesiones de sucesiones de símbolos les asociamos números, entonces las propiedades o relaciones metaligüísticas se traducirán en propiedades o relaciones entre números.

2. Algunas propiedades y operaciones aritméticas, al menos las que nos interesan, deberán ser “capturadas” en el lenguaje formalizado de la aritmética.

Más en general ¿qué relaciones y operaciones de la aritmética informal son representables en una formalización de la aritmética?

Aquí la respuesta es: **Las Funciones y Relaciones Recursivas**.