Numeración de Gödel

Nuestro lenguaje formal de primer órden para la aritmética, $\mathcal{L}_{AP}$, cuyo tipo de semejanza es,

$$\rho = \{f_+ , f_\cdot , f_s\} \cup \{c\}$$

donde $f_s \in \mathcal{F}_1$, $f_+ , f_\cdot \in \mathcal{F}_2$ y $c \in \mathcal{C}$; queda descrito como sigue,

$$\mathcal{L}_\rho = \rho \cup \{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{ \approx \} \cup \{\neg , \ \to \} \cup \{ \forall \} \cup \{) , (, ' \}$$

Queremos una función que a cada símbolo, a cada expresión y a cada sucesión finita de expresiones, le corresponda un único número natural

$$g : \mathcal{L}_\rho \cup EXP_\rho \cup \overset{\omega}{\smile} EXP_\rho \to \mathbb{N}$$

Para que sea una "buena" codificación debe de cumplir con,

1. La función g es inyectiva. Dos elementos del dominio, no les puede tocar el mísmo número.

2. Si $k \in \mathbb{N}$, debemos saber si $k \in IMG(g)$ o no y en caso afirmativo, saber de quién es imágen. Es decir tener una buena de–codificación.

Daremos un ejemplo de una numeración. Para ello lo haremos en tres pasos.

I. Sea $g_1 : \mathcal{L}_\rho \to \mathbb{N}$, definida por la siguiente regla.

$$\begin{array}{ccc} (& \mapsto & 1 \\ ) & \mapsto & 3 \\ ' & \mapsto & 5 \\ \approx & \mapsto & 7 \\ \neg & \mapsto & 9 \\ \to & \mapsto & 11 \\ \forall & \mapsto & 13 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} c & \mapsto & 15 \\ f_s & \mapsto & 17 \\ f_+ & \mapsto & 19 \\ f_\cdot & \mapsto & 21 \\ v_0 & \mapsto & 23 \\ \vdots & & \\ v_n & \mapsto & 23+2n \end{array}$$

Si $s \in \mathcal{L}_{AP}$, la imágen de s bajo la función g_1, es decir a $g_1(s)$, se le llama *el número de gödel del símbolo* s.

Observaciones.

1. La $IMG(g_1) = 2\mathbb{N} + 1$

2. La función g_1 cumple con las condiciones exigidas para ser una “buena” codificación.

Recordar:

El teorema *fundamental de la Aritmética* o teorema de *factorización única* afirma que todo entero positivo mayor que 1 es un número primo o bien un único producto, salvo por el orden de los factores, de números primos.

II. Sea $e \in EXP_\rho$. El *Número de Secuencia de* e, denotado por $g_2(e)$, está dado por la siguiente regla,

$$g_2(e) = P_0^{g_1(s_0)} \bullet P_1^{g_1(s_1)} \bullet \ \ldots \ \bullet P_n^{g_1(s_n)}$$

Donde $s_0, \ldots, s_n \in \mathcal{L}_{AP}$ son tales, que $e \leftrightharpoons s_0, \ldots, s_n$ y $P_0, P_1, \ldots, P_n$ son los primeros $n+1$ primos en orden ascendente. ($P_0 = 2,\ P_1 = 3,\ P_2 = 5,\ \ldots$)

Con esto tenemos que

$$g_2 : EXP_\rho \longrightarrow \mathbb{N}$$

Observaciones.

1. La $IMG(g_2) \subseteq 2\mathbb{N}$.
Además, si $e \in EXP_\rho$, entonces el número de secuencia de e, $g_2(e)$, es un número par, cuya descomposición en primos tiene como exponentes números impares.

2. $IMG(g_2) \cap IMG(g_1) = \emptyset$

3. La función g_2 cumple con las condiciones exigidas de codificación.

4. Sea $s \in \mathcal{L}_\rho$. Al símbolo s lo podemos ver como solamente un símbolo o como una expresión (como una sucesión finita de símbolos, una de longitud 1). Por lo que le corresponde –según sea el caso– uno y solo uno de los números $g_1(s)$ o $g_2(s)$ $(= 2^{g_1(s)})$.

III. Definimos

$$g_3 : \overset{\omega}{\smile}EXP_\rho \longrightarrow \mathbb{N}$$

como sigue. Para $e_0, e_1, \ldots, e_n \in EXP_\rho$, sea

$$g_3\left(e_0\, e_1 \ldots e_n\right) = P_0^{g_2(e_0)} \bullet P_1^{g_1(e_1)} \bullet \ \ldots \ \bullet P_n^{g_2(e_n)}$$

donde $P_0, P_1, \ldots, P_n$ son los primeros $n+1$ primos en orden ascendente.

Observaciones.

1. Si $S \in \overset{\omega}{\smile}EXP_\rho$, entonces $g_3(S)$ es un número par, cuya descomposición en primos tiene como exponentes números pares.

2. $IMG(g_3) \cap IMG(g_1) = \emptyset$ y $IMG(g_3) \cap IMG(g_2) = \emptyset$

3. La función g_3, cumple con las condiciones de codificación.

4. Si $s \in \mathscr{L}_\rho$, entonces según se considere, como un símbolo, como una expresión o como una sucesión de expresiones (una sucesión consistente de una sola expresión que tiene a su vez un sólo símbolo) le corresponde uno y sólo un número, $g_1(s)$ o $g_2(s)$ o $g_3(s)$. Ocurre algo similar para las expresiones; si $e \in EXP_\rho$, entonces le corresponde uno y solo un número $g_2(e)$ o $g_3(e)$.

Con todo lo anterior, podemos definir la función

$$g = g_1 \cup g_2 \cup g_3$$

la cual resulta ser una función tal que,

$$g : \mathscr{L}_\rho \cup EXP_\rho \cup \overset{\omega}{\smile}EXP_\rho \to \mathbb{N}$$

La función g es una “buena” codificación, es inyectiva y la decodificación se apoya gran parte, en el teorema fundamental de la Aritmética.

Ejemplos:

1. Tenemos que $c \in \mathcal{C}_{AP}$, así,

$$g_1(c) = 15 \qquad g_2(c) = 2^{15} = 32768 \qquad g_3(c) = 2^{32768}$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ con

$$n = 2^{19} \cdot 3 \cdot 5^{23} \cdot 7^7 \cdot 11^{15} \cdot 13^3$$

Así, resulta que $n \in IMG(g_2)$ por tanto, hay una ρ–expresión e tal, que $g_2(e) = n$. De–codificando a n, obtenemos

$$e \doteqdot f_+\left(v_0,\ c\right)$$

Resumiendo, n es el número de secuencia del ρ–término e.

3. Considere la fórmula atómica,

$$\alpha \doteqdot \left(f_+\left(v_{28},\ c\right) \approx v_{28}\right)$$

El número de secuencia de α, $g_2(\alpha)$, es

$$2^1 \cdot 3^{19} \cdot 5^1 \cdot 7^{79} \cdot 11^5 \cdot 13^{15} \cdot 17^3 \cdot 19^7 \cdot 23^{79} \cdot 29^3$$

Y si fuera el caso en que $\alpha \in \overset{\omega}{\smile}EXP_\rho$ tendríamos, $g_3(\alpha) = 2^{g_2(\alpha)}$.

4. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal, que

$m = 2^{1} \cdot 3^{13} \cdot 5^{79} \cdot 7^{1} \cdot 11^{19} \cdot 13^{1} \cdot 17^{79} \cdot 19^{5} \cdot 23^{15} \cdot 29^{3} \cdot 31^{7} \cdot 37^{79} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3}$

Así, $m \in IMG(g_2)$ y por tanto hay una ρ–expresión σ tal, que $g_2(\sigma) = m$.
De–codificando a m, obtenemos

$$\sigma \risingdotseq \left(\forall v_{28}\left(f_{+}\left(v_{28},\, c\right) \approx v_{28}\right)\right)$$

Resumiendo, m es el número de secuencia del ρ–enunciado σ.
Y si fuera el caso en que $\sigma \in \overset{\omega}{\smile}EXP_{\rho}$ tendríamos, $g_3(\sigma) = 2^{g_2(\sigma)}$.

5. Consideremos a la α y la σ de los ejemplos **3** y **4**. Así, $\alpha, \sigma \in \overset{\omega}{\smile}EXP_{\rho}$ y

$$g_3(\alpha, \sigma) = 2^{g_2(\alpha)} \cdot 3^{g_2(\sigma)}$$

Obsérvese que en el cálculo de predicados de Mendelson tenemos, $\alpha \vdash \sigma$.