REPRESENTABILIDAD
EN EL SISTEMA AP

La definición –metalingüistica– del *Numeral* de un numero natural n, simbolizada por $\overline{n}$, la damos recursivamente como sigue,

I. $\overline{0} = c$

II. $\overline{n^+} = f_s(\overline{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Obsérvese que si $n \in \mathbb{N}$,se tiene que $\overline{n}$ es un AP–término; es decir,

$$\overline{} : \mathbb{N} \to TRM_\rho$$

Definición₁. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^n$, con $n > 0$. Diremos que R es *Expresable (en AP)* syss hay una $\alpha_R \in FRM_{AP}$ con exactamente n variables líbres, digamos $x_1, \ldots, x_n$, tal que cualesquiera sean $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ se tiene,

R$_1$. Si $R(k_1, \ldots, k_n)$, entonces $\vdash_{AP} \alpha_R\big(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n}\big)$, y

R$_2$. Si $\neg R(k_1, \ldots, k_n)$, entonces $\vdash_{AP} \neg\alpha_R\big(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n}\big)$.

Ejemplo$_{\mathbf{R}}$.

1. La Identidad, $\big\{\langle a, a\rangle \ / \ a \in \mathbb{N}\big\}$, es expresable por la fórmula,

$$\alpha_=(v_0, v_1) \rightleftharpoons (v_0 \approx v_1)$$

Tendríamos que probar que para n y m números se tiene,

R₁. Si $n = m$, entonces $\vdash_{AP} (\overline{n} \approx \overline{m})$

R₂. Si $n \neq m$, entonces $\vdash_{AP} \neg(\overline{n} \approx \overline{m})$

2. La relación de orden, $a < b$, es expresable por la fórmula,

$$\alpha_<(v_1, v_2) \leftrightharpoons \exists v_3\Big(\neg(v_3 \approx c_0) \ \& \ \big(f_+(v_1, v_3) \approx v_2\big)\Big)$$

3. La divisibilidad, $a \mid b$, es expresable por la fórmula,

$$\alpha_|(v_1, v_2) \leftrightharpoons \exists v_3 \ (v_2 \approx f_.(v_1, v_3))$$

4. El ser primo es expresable en AP, por la fórmula: $\alpha_P(v_0)$

$$\alpha_<(\overline{1}, v_0) \ \& \ \forall v_1\Big(\big(\alpha_<(\overline{1}, v_1) \ \& \ \alpha_|(v_1, v_2)\big) \to (v_1 \approx v_2)\Big)$$

o también,

$$\alpha_<(\overline{1}, v_0) \ \& \ \forall v_1\Big(\alpha_|(v_1, v_2) \to ((v_1 \approx \overline{1}) \vee (v_1 \approx v_2))\Big)$$

Antes de dar la definición de representabilidad de funciones quedemos claros en una abreviatura que usaremos. Entenderemos por $\exists! x\, \alpha(x)$ como una abreviatura de la fórmula,

$$\exists x\, \alpha(x) \ \&\ \forall x \forall y \left(\alpha(x)\ \&\ \alpha\left(x / y\right) \ \rightarrow\ x \approx y\right)$$

donde y es la primer variable que no ocurre en α. Otra lógicamente equivalente a ésta y que podríamos tambien utilizar es,

$$\exists x \left(\alpha(x)\ \&\ \forall y \left(\alpha\left(x / y\right) \ \rightarrow\ x \approx y\right)\right)$$

usando el mismo criterio para la variable y.

Definición$_2$. Sea $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, con $n > 0$. Diremos que f es *Representable (en AP)* syss hay una $\alpha_f \in FRM_{AP}$ con exactamente $(n+1)$ variables líbres, digamos $x_1, \ldots, x_n, y$ tal que,

Para cualesquiera que sean $k_1, \ldots, k_n,\ m \in \mathbb{N}$ se tiene,

F$_1$. Si $f(k_1, \ldots, k_n) = m$, entonces $\vdash_{AP}\ \alpha_f\left(x_1 / \overline{k_1}, \ldots,\ x_n / \overline{k_n},\ y / \overline{m}\right)$. Y

F$_2$. $\vdash_{AP}\ \exists! y\, \alpha_f\left(x_1 / \overline{k_1}, \ldots,\ x_n / \overline{k_n},\ y\right)$.

Si en lugar de **F**$_2$ exigimos,

F$_{2'}$. $\vdash_{AP}\ \exists! y\, \alpha_f\left(x_1, \ldots,\ x_n,\ y\right)$.

Se dice que f es *Fuertemente Representable (en AP)*.

Estas dos nociones coinciden.

Proposición$_1$. Sea $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$. Tenemos que,

f es fuertemente representable en AP syss f es representable en AP.

Si f es fuertemente representable, usando generalización y posteriormente usamos repetidamente el axioma de particularización, **AL**$_4$, aplicado a los términos $\overline{k_1}, \ldots,\ \overline{k_n}$, obtenemos que f es representable. La otra prueba es un tanto ardua y nosotros la omitimos. Para ver la que se le ocurrió a V. H. Dyson, ésta se encuentra en Mendelson, proposición 3.12.

Ejemplo$_{\mathbf{F}}$.

1. La suma, $+$, es representable por la fórmula

$$\alpha_+\left(v_0,\ v_1,\ v_2\right) \rightleftharpoons \left(f_+\left(v_0,\ v_1\right)\ \approx\ v_2\right)$$

Tendríamos que probar que,

F$_1$. Si $n+m=p$, se tiene $\vdash_{AP} \left(f_+\left(\overline{n},\ \overline{m}\right) \approx \overline{p}\right)$ o bien $\vdash_{AP} \left(f_+\left(\overline{n},\ \overline{m}\right) \approx \overline{n+m}\right)$

F$_2$. $\vdash_{AP} \exists! v_2\left(f_+\left(\overline{n},\ \overline{m}\right) \approx v_2\right)$ o bien

F$_{2'}$. $\vdash_{AP} \exists! v_2 \left(f_+\left(v_0,\ v_1\right) \approx v_2\right)$

2. La función producto, $\cdot$, es representable por la fórmula

$$\alpha_{\cdot}\left(v_0,\ v_1,\ v_2\right) \rightleftharpoons f_{\cdot}\left(v_0,\ v_1\right) \approx v_2$$

3. La función constante cero, $Z(x) = C_0^1(x) = 0,$ es representable por

$$\alpha_Z\left(v_0,\ v_1\right) \rightleftharpoons \left((v_0 \approx v_0)\ \&\ (v_1 \approx c)\right)$$

4. La sucesor, $\_^+$, es representable por

$$\alpha_{\_^+}\left(v_0,\ v_1\right) \rightleftharpoons \left(f_s(v_0) \approx v_1\right)$$

F$_1$. Sean $n,m \in \mathbb{N}$ tales, que $n^+ = m.$ Así, puesto que la identidad es expresable, tenemos $\vdash_{AP} \overline{n^+} \approx \overline{m}$ y de aqui que, por la definición de numeral, obtenemos $\vdash_{AP} f_s(\overline{n}) \approx \overline{m}.$

F$_{2'}$. Hay que probar dos partes.

$\exists$] Puesto que el término $f_s(v_0)$ es libre para v_1 en la fórmula $\left(f_s(v_0) \approx v_1\right)$, por la regla $\exists,$ tenemos que

$$\left(f_s(v_0) \approx f_s(v_0)\right) \vdash_{AP} \exists v_1 \left(f_s(v_0) \approx v_1\right)$$

Pero sabemos que $\vdash_{AP} \left(f_s(v_0) \approx f_s(v_0)\right)$ por tanto, $\vdash_{AP} \exists v_1 \left(f_s(v_0) \approx v_1\right).$

!] P.D. $\vdash_{AP} \left(\alpha_{\_^+}\left(v_0,\ v_1\right)\ \&\ \alpha_{\_^+}\left(v_0,\ v_2\right) \rightarrow (v_1 \approx v_2)\right).$

1.	$\left(f_s(v_0) \approx v_1\right)$	Ho.
2.	$\left(f_s(v_0) \approx v_2\right)$	Ho.
3.	$(v_1 \approx v_2)$	Trans. de $\approx$

Es decir

$$\left(f_s(v_0) \approx v_1\right),\ \left(f_s(v_0) \approx v_2\right) \vdash_{AP} (v_1 \approx v_2)$$

Y de esto, por algunos resultados del **MTD**, obtenemos

$$\vdash_{AP} \left(f_s(v_0) \approx v_1\right)\ \&\ \left(f_s(v_0) \approx v_2\right) \rightarrow (v_1 \approx v_2)$$

Finalmente, usando dos veces generalización obtenemos lo que se pedía. †

Probaremos más adelante el importante resultado siguiente,

Proposición$_2$.

1. Toda función recursiva primitiva es representable en AP.
2. Toda relación recursiva primitiva es expresable en AP.

Tambien se tiene la conversa, aunque se sale de nuestro alcance.

Proposición$_3$.

1. Toda función representable en AP es una función recursiva primitiva.
2. Toda relación expresable en AP es una relación recursiva primitiva. †

Para Recusión General, hay algunos resultados entorno a esto. Como hemos comentado, esta parte queda fuera del objetivo de éste curso.