Teoremas de Incompletud de Gödel (1931)

Über formal unentscheidbare Sätze
der Principia Mathematica und verwandter Systeme.
(Sobre proposiciones formalmente indecidibles
en Principia Mathematica y Sistemas afines)

Consideremos $\rho = \left\{ f_s , f_+ , f_\cdot , c \right\}$ y a su lenguaje $\mathscr{L}_\rho$.

Supongase que AP es un conjunto de ρ–enunciados *Decidible*, en el cual todas las relaciones *Decidibles* son Representables.

Primer Teorema.

Así, hay un ρ–enunciado σ_g tal, que

I. Si AP es consistente, entonces $AP \nvdash \sigma_g$.

II: Si AP es ω–consistente, entonces $AP \nvdash \neg\sigma_g$.

Por lo que, si AP es ω–Consistente, entonces AP tiene un indecidible, a saber σ_g, y por tanto Incompleta –Sintácticamente.

Donde,

AP es ω–*Consistente* syss para toda fórmula $\varphi(x)$ de tiene que,
Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $AP \vdash \varphi\left(x / \overline{n}\right)$, entonces $AP \nvdash \neg\forall x\, \varphi(x)$

Segundo Teorema.

Si con_T es un ρ–enunciado el cual garantiza la consistencia de T, entonces

$$CON(T) \Rightarrow T \nvdash con_T$$

Teorema de Gödel–Rosser (Generalizado)

En 1936, Berkley Rosser modificó la construcción de Gödel, obteniendo el resultado usando solamente consistencia –sin usar ω–consistencia. Aquí presentamos una versión más amplia, en el sentido de extensiones –numerables– de la arimética.

En lo que sigue consideremos un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \left\{ f_s^1 \,,\, f_+^2 \,,\, f_\cdot^2 \,,\, c_0 \right\} \qquad \text{y} \qquad \left| \, \rho \, \right| \leq \aleph_0$$

Y por tanto, $\left| \, \mathcal{L}_\rho \, \right| = \aleph_0$.

El Teorema toma la siguiente forma.

Sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ tal que:

1. T es Recursivamente Axiomatizable (sus axiomas forman un conjunto decidible).

2. Toda Relación (Función) Recusiva es Expresable (Representable) en T.

3. **i**). Para toda ρ–fórmula con exactamente una variable libre, digamos $\varphi(x)$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \varphi\left(x \,/\, \overline{0}\right) \;\&\; \ldots \;\&\; \varphi\left(x \,/\, \overline{k}\right) \rightarrow \forall x\left(x \leq \overline{k} \rightarrow \varphi(x)\right)$$

ii). Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \forall x\left(x \leq \overline{k} \;\vee\; \overline{k} \leq x\right)$$

Así, si T es Consistente, entonces T tiene un Indecidible y por tanto es Incompleta.