Recursión para $\mathbb{N}$

Hay varias versiones del principio de recursión para el conjunto de los números naturales, aquí mencionaremos solamente 3 e iremos de la más simple a la más compleja.

I) Para toda función $G : A \to A$ y todo $a \in A$, *hay* una *única* **función** F tal que

$$F : \mathbb{N} \to A$$

I) $F(0) = a$

II) $\forall n \in \mathbb{N}\left[F(n^+) = G(F(n))\right]$

Observación:

$$F(0) = a \qquad F(2) = G(G(a))$$

$$F(1) = G(a) \qquad F(3) = G(G(G(a)))$$

Ejemplo: El numeral de un número natural.

$$\overline{} : \mathbb{N} \to TRM_{AP}$$

I) $\overline{0} = c$

II) $\forall n \in \mathbb{N}\left[\overline{n^+} = f_s(n)\right]$

Basta tomar, $A = TRM_{AP}$, $a = c$ y $G(x) = f_s(x)$.

II). Si $G_1 : A \times \mathbb{N} \to A$ y $a \in A$, entonces hay una única **función** F_1 tal que

$$F_1 : \mathbb{N} \to A$$

I) $F_1(0) = a$

II) $\forall n \in \mathbb{N}\left[F_1(n^+) = G_1(F_1(n), n)\right]$

Observación:

$$F_1(0) = a \qquad F_1(2) = G_1(F_1(1), 1) = G_1(G_1(a, 0), 1)$$

$$F_1(1) = G_1(F_1(0), 0) = G_1(a, 0) \qquad F_1(3) = G_1(F_1(2), 2) = G_1\Big(G_1(G_1(a, 0), 1), 2 \Big)$$

Ejemplo: El factorial de un natural.

$$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

I) $0! = 1$

II) $\forall n \in \mathbb{N}\left[n^+! = n! \bullet n^+\right]$

Basta tomar, $A = \mathbb{N}$, $a = 1$ y $G_1(x, y) = x \bullet y^+$.

III). Versión Paramétrica.

Si P es un conjunto, $G_2 : P \times A \times \mathbb{N} \to A$ y $H : P \to A$, entonces *hay* una *única* **función** F_2 tal que

$$F_2 : P \times \mathbb{N} \to A$$

I) $\forall p \in P \left[F_2(p,0) = H(p) \right]$

II) $\forall p \in P \ \forall n \in \mathbb{N} \left[F_2(p,n^+) = G_2(p,F_2(p,n),n) \right]$

Ejemplo: La Suma entre Naturales:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

I) $\forall m \in \mathbb{N} \left[m + 0 = m \right]$

II) $\forall m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \left[m + n^+ = (m+n)^+ \right]$

Basta tomar, $P = A = \mathbb{N}$, $H(x) = x$ y $G_2(x,y,z) = y^+$.