ARITMÉTICA RECURSIVA

En lo que sigue adoptaremos las siguientes **convenciones**.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, el "universo" donde viviremos de ahora en adelante.
Usaremos las letras minúsculas, $x, y, z, w, m, n, p, q, i, j, k, l$ con –eventualmente– índices y supraíndices, como **metavariables** para **números naturales**.

Por una *Función* u *Operación* f, *de aridad* n, entenderemos que $n \geq 1$ y $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.

Por una *Relación* R, *de aridad* n, entenderemos que $n \geq 1$ y $R \subseteq \mathbb{N}^n$.

Quedando por entendido que, al hablar de funciones y relaciones serán de, o entre, números naturales y tendrán una aridad **distinta de cero**.

No como una regla, pero en la medida de lo posible, se utilizarán letras minúsculas como metavariables para funciones; en cambio, usaremos letras mayúsculas para relaciones.

Muy particularmente, trabajaremos con las siguientes funciones.

- La *Función sucesor.*

$$\_^{+} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\forall x \, , \, x^{+} = x + 1$$

- Las *Funciones Constantes.* Para un k arbitrario,

$$\mathcal{C}^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$\forall x_1, \dots, x_n \; \mathcal{C}^n_k(x_1, \dots, x_n) = k$$

- Las *Funciones Proyección.* Para $1 \leq k \leq n$,

$$\pi^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$\forall x_1, \dots, x_n \; \pi^n_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

Usaremos dos métodos de definición de funciones, por *Sustitución* y por *Recursión*.

I) **Método de Recursión**.

a) Sean $m \in \mathbb{N}$ y $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

i) $F(0) = m$

ii) $\forall y F(y^{+}) = G\big(F(y), y\big)$

se dirá que *se obtuvo por Recursión a partir de m y de G*.

b) Sean $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $G : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ dada por

i) $\forall x_1, \ldots, x_n F\big(x_1, \ldots, x_n,\ 0\big) = H(x_1, \ldots, x_n)$

ii) $\forall x_1, \ldots, x_n \forall y F\big(x_1, \ldots, x_n,\ y^+\big) = G\Big(x_1, \ldots, x_n,\ \ F(x_1, \ldots, x_n, y)\ \ , y\Big)$

se dice que *se obtuvo por Recursión apartir de H y de G*.

II) **Método de Sustitución**.

Sea $G : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ y sean $H_1, \ldots, H_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ dada por

$$\forall x_1, \ldots, x_n F(x_1, \ldots, x_n) = G\Big(H_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ \ldots\ \ , H_m(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

se dirá que *se obtuvo por Sustitución a partir de G y de $H_1, \ldots, H_m$*.

Definición$_1$. Son *Funciones Iniciales* o, símplemente, *Iniciales,* las siguientes,

I) La función Sucesor: $^+$

II) Las funciones Constantes: $\mathcal{C}_k^n$

III) Las funciones Proyección: π_k^n

Definición$_2$. Una función f es una *Función Recusiva (Primitiva)* syss hay una lista finita de funciones, digamos $f_1, \ldots, f_n$, donde,

i) $f_n = f$ y

ii) Para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que, o bien

a) f_i es Inicial. O,

b) f_i se obtuvo por Recursión o por Sustitución
a partir de funciones anteriores de la lista.

Así, las funciones recursivas son aquellas que se obtienen al aplicar, un número finito de veces, recursión y sustitución a funciones iniciales. Dicho de manera coloquial, son las funciones generadas, por recursión y sustitución, a partir de las iniciales.

Como ejemplos, veamos que la suma y el producto son recursivas primitivas. Antes, recordemos cómo se definen.

$+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$	$\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
i) $\forall m,\ m + 0 = m$	**i)** $\forall m,\ m \cdot 0 = 0$
ii) $\forall m,n,\ m + (n^+) = (m+n)^+$	**ii)** $\forall m,n,\ m \cdot (n^+) = (m \cdot n) + m$

Pasemos a dar las listas, empezando con la suma.

$f_1^1 : \ \pi_1^1$	Inicial	$f_1^1(x) = x$
$f_2^1 : \ \_^+$	Inicial	$f_2^1(x) = x^+$
$f_3^3 : \ \pi_2^3$	Inicial	$f_3^3(x,y,z) = y$
$f_4^3 : \ f_2^1(f_3^3(x,y,z))$	Sust. a partir de f_2 y f_3	$f_4^3(x,y,z) = y^+$
$f_5^2 : \ f_5^2\big(x,\ 0\big) = f_1^1(x)$	Rccn. a partir	$f_5^2(x,0) = x$
$f_5^2\big(x,\ y^+\big) = f_4^3\big(x,\ f_5^2(x,y),\ y\big)$	de f_1 y de f_4	$f_5^2(x,y^+) = (f_5^2(x,y))^+$

Con lo que queda probado su recursividad primitiva.

Pasemos con el producto. Como para definirlo necesitamos de la suma, símplemente continuamos la lista anterior.

$f_6 : \ \mathcal{C}_0^1$	Inicial	$f_6(x) = 0$
$f_7 : \ \pi_1^3$	Inicial	$f_7(x,y,z) = x$
$f_8 : \ f_5\big(f_3(x,y,z),\ f_7(x,y,z)\big)$	Sust. a partir de f_5 y $f_3,\ f_7$	$f_8(x,y,z) = f_5(y,x)$
$f_9 : \ f_9\big(x,\ 0\big) = f_6(x)$	Rcn. a partir	$f_9(x,0) = 0$
$f_9\big(x,\ y^+\big) = f_8\big(x,\ f_9(x,y),\ y\big)$	de f_6 y de f_8	$f_9(x,y^+) = f_5(f_9(x,y),x)$

Dejamos al lector probar que la exponenciación y el factorial son funciones recusivas.