Primeras propiedades de las Funciones Recursivas

Proposición$_1$. Sea $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ y sean $x_1, \ldots, x_n$ variables distintas. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea z_i alguna de las variables $x_1, \ldots, x_n$. Considere la función

$$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(z_1, \ldots, z_m)$$

Así, si g es una Función Recursiva, también lo será f.

Prueba. Supongamos que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene que $z_i = x_{j_i}$ con $j_i \in \{1, \ldots, n\}$. Pero entonces $z_i = \pi^n_{j_i}(x_1, \ldots, x_n)$. Así las cosas, tenemos que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(z_1, \ldots, z_m) = g(\pi^n_{j_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \pi^n_{j_m}(x_1, \ldots, x_n))$$

y por tanto, f es recursiva ya que se obtiene por Sustitución a partir de la recursiva g y de las Iniciales $\pi^n_{j_1}, \ldots, \pi^n_{j_m}$. †

Algunas aplicaciones de este resultado son,

1). *Permutar variables.*

Si $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es recursiva, entonces

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$f(x_1, x_2) = g(x_2, x_1)$$

es recursiva. Pues, basta tomar $m = 2,\ n = 2, z_1 = x_2$ y $z_2 = x_1$.

2). *Añadir variables artificiales.*

Si $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es recursiva, entonces

$$f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_3)$$

es recursiva. Pues, basta tomar $m = 2,\ n = 3, z_1 = x_1$ y $z_2 = x_3$. La nueva variable x_2, se le llama *artificial* pues no influye en el valor de $f(x_1, x_2, x_3)$.

3). *Repetir variables.*

Si $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ es recursiva, entonces

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, x_1)$$

es recursiva. Pues, basta tomar $m = 3,\ n = 2, z_1 = x_1,\ z_2 = x_2$ y $z_3 = x_1$.

La Regla de Sustitución puede ser extendida al caso en que cada H_i puede ser una función de algunas y no necesariamente todas las variables involucradas:

Proposición$_2$. (**Método de Sustitución**') Sea $G : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ y sean $x_1, \ldots, x_n$ variables distintas. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean $n_i > 0$ y $H'_i : \mathbb{N}^{n_i} \to \mathbb{N}$. Consideremos también a,

$$F' : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

$$F'(x_1, \ldots, x_n) = G\Big(H'_1(z^1_1, \ldots, z^1_{n_1}) , \ \ldots \ , H'_m(z^m_1, \ldots, z^m_{n_m})\Big)$$

donde $z^i_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Así, si G y las H'_i son Funciones Recursivas, también F es recursiva.

Prueba. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $H_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ la función dada por

$$H_i(x_1, \ldots, x_n) = H'_i(z^i_1, \ldots, z^i_{n_i}).$$

Ésta(s) es(son) recursiva(s) por la **Proposición**$_1$. Pero entonces,

$$F'(x_1, \ldots, x_n) = G\Big(H_1(x_1, \ldots, x_n) , \ \ldots \ , H_m(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

la cual resulta ser recursiva ya que se obtiene por Sutitución a partir de la recursiva G y de las recursivas $H_1, \ldots, H_m$. †

También en la regla de Recursión se puede extender.

Proposición$_3$. (**Método de Recursión**')

Sean n, k y l números positivos y sean $x_1, \ldots, x_n$ variables distintas. Consideremos las funciones $H' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $G' : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$, así como también a,

$$F' : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$$

i) $F'(x_1, \ldots, x_n, 0) = H'(z_1, \ldots, z_k)$

ii) $F'(x_1, \ldots, x_n, y^+) = G'\Big(w_1, \ \ldots \ , w_l\Big)$

donde las $z_i \in \Big\{ x_1, \ \ldots \ , x_n \Big\}$ y las $w_j \in \Big\{ x_1, \ \ldots \ , x_n, \ F(x_1, \ldots, x_n, y), \ y \Big\}$.

Así, si H' y G' son Funciones Recursivas, entonces F' es una Función Recursiva.

Prueba: **TAREA**. †

Proposición$_4$. Considere la siguiente definición alternativa de función Inicial:

Son *Iniciales,* las siguientes funciones:

I) La función Sucesor: $^+$

II') La funcion Constante Cero: $\mathcal{Z} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ \forall x \ \mathcal{Z}(x) = 0$

III) Las funciones Proyección: π^n_k

Toda función recursiva (primitiva) en el primer sentido es la misma que en este segundo.

Prueba: **TAREA**.

Sugerencia: Basta ver que $\forall k, \mathcal{C}_k^n$ es recursiva (usando Recursión') y esto se hace por inducción. †

Veamos unos primeros ejemplos de funciones recursivas.

Algunas Funciones Recursivas

Proposición. Las siguientes funciones son recursivas primitivas:

a) La *Predecesor.* $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; dada por,

$$\delta(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 0 \\ & \text{o} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sugerencia: $$\begin{aligned} \delta(0) &= 0 \\ \delta(x^+) &= x \end{aligned}$$

b) La *Diferencia Positiva.* $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; dada por,

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ & \text{o} \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}$$

Sugerencia: $$\begin{aligned} x \dot{-} 0 &= x \\ x \dot{-} (y^+) &= \delta(x \dot{-} y) \end{aligned}$$

c) El *Valor Absoluto de la Diferencia.* $|\_ - \_| : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; dada por,

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ & \text{o} \\ y-x & \text{si } x < y \end{cases}$$

Sugerencia: $|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$

d) El *Mínimo de dos Números.* $min : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; dada por,

$$min(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ \text{o} & \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

Sugerencia: $min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$

e) El *Mínimo de varios números.* $min^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}.$ con $n \geq 2$
Sugerencia: Por Inducción: para todo $n \geq 2$, min^n es una F.R.P. y para ello usar $min^{n+1}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = min(min^n(x_1,\ldots,x_n),x_{n+1})$.

f) El *Máximo de dos números.* $max : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; dada por,

$$max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x > y \\ & \text{o} \\ y & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

Sugerencia: $max(x,y) = y + (x \dot{-} y)$

g) El *Máximo de varios números.* $max^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.

h) El *Signo de un número.* $sg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; dada por,

$$sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ & \text{o} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sugerencia: $$\begin{aligned} sg(0) &= 0 \\ sg(x^+) &= 1 \end{aligned}$$

i) El *Signo Contrario de un número.* $\overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; dada por,

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ & \text{o} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sugerencia: $\overline{sg}(x) = 1 \dot{-} sg(x)$

Antes de pasar a dar los últimos ejemplos, recordemos lo que nos dice,

El Algoritmo de la División para $\mathbb{N}$:

$$\forall x\ \forall y \neq 0 \exists!\ q,\ r\Big(x = y \cdot q + r \text{ con } r < y\Big)$$

A q y a r se les llaman el *Cociente* y el *Residuo,* respectivamente, de dividir x entre y.

Si bien la división entre "cero" no está definida, a nosotros nos interesa tener definida las funciones **cociente** (coc) y **residuo** (res) para todo par de naturales que se vayan a dividir. Bien podríamos pensar que al "dividir" un número por cero, se les podría asignar a estas funciones cualquier valor, para nosotros, tomarán el valor de 0.

(**Informalmente**, convenimos que para cualquier número natural x se tiene, $x = 0 \cdot 0 + 0.$)

j) El *Residuo de dividir* x *entre* y. $res : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. ($res(x, y) = r$).

k) El *Cociente de dividir* x *entre* y. $coc : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. ($coc(x, y) = q$).

Prueba: **TAREA**.

Sugerencia: Resolver primero $res'(x,y)$, $coc'(x,y)$, con la intención de que

$$y = x \cdot coc'(x,y) + res'(x,y)$$

finalmente, $res(x,y) = res'(y,x)$ y $coc(x,y) = coc'(y,x)$.