Definiciones y propiedades de funciones recursivas.

Definición$_1$. Sumas y productos acotados:
Sea $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$. Definimos,

1. $$\sum_{y<z} f(x_1,\dots,x_n,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ f\big(x_1,\dots,x_n,\ 0\big) + \cdots + f\big(x_1,\dots,x_n,\ z-1\big) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

2. $$\sum_{y\le z} f(x_1,\dots,x_n,y) = f\big(x_1,\dots,\ x_n,\ 0\big) + \dots + f\big(x_1,\dots,x_n,\ z\big)$$

3. $$\prod_{y<z} f(x_1,\dots,x_n,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ f(x_1,\dots,x_n,0) \bullet \cdots \bullet f(x_1,\dots,x_n,z-1) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

4. $$\prod_{y\le z} f(x_1,\dots,x_n,y) = f\big(x_1,\dots,x_n,\ 0\big) \bullet \cdots \bullet f\big(x_1,\dots,x_n,\ z\big)$$

Las cuales son operaciones de aridad $n+1$ (*v.g.* están en función de $x_1,\dots,x_n$ y de z).

Proposición$_5$. Las sumas y productos acotados de Funciones Recursivas, son Funciones Recursivas.

Prueba: Veamos **1**.

La función $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ dada por,

$$\begin{aligned} g(x_1,\dots,x_n,0) &= 0 \\ g(x_1,\dots,x_n,z^+) &= g(x_1,\dots,x_n,z) + f(x_1,\dots,x_n,z) \end{aligned}$$

se obtiene por Recursión a partir de $\mathcal{C}_0^n$ y de G donde,

$$G : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$$
$$G\big(u_1,\dots,u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2}\big) = \pi_1^1(u_{n+1}) + f\big(u_1,\dots,u_n,\ u_{n+2}\big)$$

Ahora bien, G se obtiene por Sustitución' a partir de $+$ y de π_1^1, f.

Recapitulando, si f es recusiva, entonces G lo sería y por tanto también g. Finalmente,

$$g(x_1,\dots,x_n,z) = \sum_{y<z} f(x_1,\dots,x_n,y)$$

Pasemos a **2**. La idea es tomar $\sum_{y\le z} f(x_1,\dots,x_n,y) = \sum_{y<z+1} f(x_1,\dots,x_n,y)$ y para ello nos ayudamos de la función g dada anteriormente.

Sea $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, dada por:

$$h(x_1, \ldots, x_n, z) = g(x_1, \ldots, x_n, z+1)$$

ésta se obtiene por Sustitución’ a partir de las funciones g y de $\pi_1^1(x_i)$, $\_^+$. Pero así,

$$h(x_1, \ldots, x_n, z) = \sum_{y \leq z} f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

y será recursiva siempre y cuando f lo sea.

Se dejan al lector (**TAREA**) los productos acotados.

Ejemplo: Sea,

$$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\forall x,\ \tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \text{o} & \\ \text{número de divisores de } x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Así, τ es una función recursiva. Pues:

$$\tau(x) = \sum_{y \leq x} \overline{sg}\big(res\big(x,\ y\big)\big)$$

donde $\overline{sg}(res(x,y))$ es una función que se obtiene por sustitución de las funciones recursivas $\overline{sg}$ y res. por lo que es recursiva. Finalmente τ es una función recursiva.

Definición$_2$. Sumas y productos doblemente acotados:

1. $$\sum_{u<y<v} f(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n, u+1) + \cdots + f(x_1, \ldots, x_n, v-1) & \text{si } u < v \\ \text{o} & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. $$\prod_{u<y<v} f(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n, u+1) \bullet \cdots \bullet f(x_1, \ldots, x_n, v-1) & \text{si } u < v \\ \text{o} & \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. $\sum_{u \leq y < v} f(x_1, \ldots, x_n, y)$, $\sum_{u < y \leq v} f(x_1, \ldots, x_n, y)$, $\sum_{u \leq y \leq v} f(x_1, \ldots, x_n, y)$

4. $\prod_{u \leq y < v} f(x_1, \ldots, x_n, y)$, $\prod_{u < y \leq v} f(x_1, \ldots, x_n, y)$, $\prod_{u \leq y \leq v} f(x_1, \ldots, x_n, y)$

Proposición$_6$. Las sumas y productos doblemente acotados de funciones recursivas, son recursivas.

Prueba: **TAREA**. †