

Operador μ

El operador μ es una función que a las relaciones les asocia un número, el primero que cumple con la relación, si es que lo hay.

Definición₁. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ con la propiedad de que para cada $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$, hay un $y \in \mathbb{N}$ tal, que $R(\bar{x}, y)$. Así,

$$\mu_y R(\bar{x}, y) = \min \{y \in \mathbb{N} / R(\bar{x}, y)\}$$

* * * * *

NOTA: Para Méndelson se tiene,

Si $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ y es tal que para cada $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$, hay un $y \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $g(\bar{x}, y) = 0$, entonces la función

$$f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(\bar{x}) = \mu_y (g(\bar{x}, y) = 0)$$

se dice que se obtuvo a partir de g mediante el *Operador μ Restringido*. Si además, la función g es recursiva, entonces se dirá que f es una *Función Recursiva General*.

Nosotros trabajaremos solamente con funciones recursivas *Primitivas*.

* * * * *

Hay discusión acerca de la calculabilidad efectiva del operador μ , definido como en **Def₁**, pero al acotarlo es posible obtener recursividad.

Definición₂. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Definimos la siguiente función, de aridad $n + 1$,

$$\mu_{y < v} R(\bar{x}, y) = \begin{cases} \mu_y R(\bar{x}, y) & \text{si hay un } y < v \text{ tal, que } R(\bar{x}, y) \\ v & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se elige el valor de v , en el segundo caso, por conveniencia. (Nótese que $\mu_{y < 0} R(\bar{x}, y) = 0$).

Proposición₃. Si $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ es una relación recursiva, entonces $\mu_{y < v} R(\bar{x}, y)$ es una función recursiva.

Prueba: Sea $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por: $f(\bar{x}, v) = \mu_{y < v} R(\bar{x}, y)$. Así,

$$f(\bar{x}, v) = \sum_{y < v} \left(\prod_{u \leq y} C_R(\bar{x}, u) \right)$$

†

Definición₄. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$.

$$\mu_{y \leq y} R(\bar{x}, y) = \mu_{y < y+1} R(\bar{x}, y)$$

Proposición₅. Si $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ es una relación recursiva, entonces $\mu_{y \leq y} R(\bar{x}, y)$ es una función recursiva.

Prueba: TAREA.

Ejemplos:

1. Sea $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una enumeración de todos los primos en forma ascendente. Así,

$$p(0) = 2, p(1) = 3, \dots$$

Escribiremos P_n en lugar de $p(n)$.

Tenemos que esta enumeración es recursiva pues:

$$\begin{aligned} P_0 &= 2 \\ P_{n+} &= \mu_{y < 2 \cdot P_n} (PRM(y) \wedge P_n < y) \end{aligned}$$

2. Gracias al teorema fundamental de la Aritmética, sabemos que si $a > 1$, entonces tiene una única factorización, salvo permutaciones, en potencias de números primos. Nos conviene pensar ésta factorización como “infinita” y ordenada en forma creciente, es decir, **convenimos** que, *todo entero positivo a , se puede escribir de la siguiente manera,*

$$a = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \dots \cdot P_k^{a_k} \cdot P_{k+1}^{a_{k+1}} \cdot \dots$$

donde todos los exponentes, los a_i 's, exepcto un número finito, son cero.

Sin pérdida alguna, podemos incluir al número 1 como sigue,

$$1 = P_0^0 \cdot P_1^0 \cdot \dots \cdot P_k^0 \cdot P_{k+1}^0 \cdot \dots$$

De ahora en adelante, a esta manera de “descomponer” a un número $a \geq 1$, la llamaremos simplemente, *la descomposición de a .*

Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos la función $[a]_j$ como el exponente del j -ésimo primo en la descomposición de a . En nuestro ejemplo, sería $[a]_j = a_j$. Otra **convención** más, $[0]_j = 0$ para toda j .

Podemos describir dicha función de la siguiente manera:

$$[\]_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$[x]_j = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ a_j & \text{si } x = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \dots \cdot P_j^{a_j} \cdot P_{j+1}^{a_{j+1}} \cdot \dots \end{cases}$$

Ésta es recursiva pues,

$$[x]_j = \mu_{y < x} \left(\neg(P_j^{y+1} \mid x) \right)$$

Observaciones. Gracias a la definición del operador μ tenemos,

a). Si $\neg(P_j \mid x)$, para $x > 0$, se tiene que

$$[x]_j = 0 \quad \text{y} \quad \mu_{y < x} \left(\neg(P_j^{y+1} \mid x) \right) = 0$$

b). Para el caso $x = 0$ tenemos,

$$[0]_j = 0 \quad \text{y} \quad \mu_{y < 0} \left(\neg(P_j^{y+1} \mid 0) \right) = 0$$

3.a Para un $a > 1$, nos interesará saber el número de primos —distintos— que lo dividen, o equivalentemente, el número de exponentes no-cero en su descomposición. A éste número lo denotaremos por $ld(a)$. Arbitrariamente, y para tenerla definida para todo natural, pondremos que $ld(0) = 0 = ld(1)$. Veamos que ld es una función recursiva:

a). $ld(x) = \sum_{j \leq x} sg([x]_j)$. Recordar que, $[x]_i = 0$ syss $\neg(P_i \mid x) \vee (x < 2)$.

b). Sea $R(x,y)$ syss $PRM(y) \wedge (y \mid x) \wedge (x \neq 0)$. Así,

$$ld(x) = \sum_{y \leq x} \overline{sg} \left(C_R(x,y) \right)$$

Obsérvese que con esta definición, $ld(0) = \overline{sg} \left(C_R(0,0) \right) = 0$ y

$$ld(1) = \overline{sg} \left(C_R(1,0) \right) + \overline{sg} \left(C_R(1,1) \right) = 0 + 0 = 0.$$

3.b Ahora nos interesa, para empezar, dado un número $a > 1$, saber el índice del (primer) primo que no lo divide y que ningun otro primo mayor lo divida. A éste número lo denotaremos por $lg(a)$. Con la convención que dimos queda que $lg(1) = 0$ y arbitrariamente escogemos que $lg(0) = 0$. Esta función, de aridad 1, es recursiva pues,

$$lg(x) = \mu_{y < x} \left[\forall z < x \left(z \geq y \Rightarrow \left(\neg(P_z \mid x) \right) \right) \right]$$

y como queríamos, $lg(1) = 0 = lg(0)$.

En estos dos últimos ejemplos, tanto a $ld(a)$ como a $lg(a)$, *indistintamente* les

llamaremos la *Longitud de a*. La razón de ello quedará clara con el uso que les daremos. En particular para nuestro siguiente ejemplo.

4. Por el momento nos fijaremos en números tales que en su descomposición al aparecer un primo que no lo divide, todo primo mayor que éste, tampoco lo divide; es decir si, en su descomposición, aparece un exponente cero todos los posteriores exponentes son cero. Tomemos dos de estos, digamos

$$a = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \dots \cdot P_k^{a_k} \cdot P_{k+1}^0 \cdot P_{k+2}^0 \cdot \dots \quad y$$

$$b = P_0^{b_0} \cdot P_1^{b_1} \cdot \dots \cdot P_l^{b_l} \cdot P_{l+1}^0 \cdot P_{l+2}^0 \cdot \dots$$

(donde $a_i \neq 0$ y $b_j \neq 0$).

Ahora queremos definir, recursivamente, una función binaria, digamos \star , de tal suerte que

$$a \star b = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \dots \cdot P_k^{a_k} \cdot P_{k+1}^{b_0} \cdot P_{k+2}^{b_1} \cdot \dots \cdot P_{k+1+l}^{b_l}$$

Dicha función la podemos expresar de la siguiente manera,

$$a \star b = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \dots \cdot P_k^{a_k} \cdot P_{lg(a)}^{[b]_0} \cdot P_{lg(a)+1}^{[b]_1} \cdot \dots \cdot P_{lg(a)+(lg(b)-1)}^{[b]_{lg(b)-1}}$$

Veamos que \star es una Función Recursiva, y que puede estar definida para cualquier par de números. Tenemos,

$$x \star y = x \cdot \prod_{j < lg(y)} P_{lg(x)+j}^{[y]_j}$$

A esta operación se le conoce con el nombre de *Concatenación*.

Obsérvese que $x \star 0 = x \cdot 1 = x$ y $x \star 1 = x \cdot 1 = x$, por un lado y por otro lado, $0 \star y = 0$ y $1 \star y = y$.

Ejercicio:

- 1) \star es asociativa y no conmutativa
- 2) ¿Qué pasa si usamos en la definición de \star la función ld en lugar de lg ?

Veamos el último resultado de esta sección, cuya prueba se deja al lector.

Proposición₆. Sean $g_1, \dots, g_m : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$. Ahora consideremos las relaciones $R_1, \dots, R_m \subseteq \mathbb{N}^n$ con la propiedad de que para cada $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ se tiene una y solo una de $R_1(\vec{x})$ o \dots o $R_m(\vec{x})$. Sea $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ la operación definida por casos, como sigue,

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g_1(\vec{x}) & \text{si } R_1(\vec{x}) \\ g_2(\vec{x}) & \text{si } R_2(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots \\ g_m(\vec{x}) & \text{si } R_m(\vec{x}) \end{cases}$$

Si las operaciones g_1, \dots, g_m son Funciones Recursivas y las relaciones R_1, \dots, R_m son Relaciones Recursivas, entonces f es una Función Recursiva.

Prueba: TAREA.

†

NOTA:

Según MENDELSON, que **NO** es necesario exigir que las relaciones R_1, \dots, R_m sean recursivas.