

Aritmetización del Metalenguaje

A continuación damos en un solo resultado, una lista de las relaciones y operaciones recursivas que nos ayudarán a aritmetizar el Metalenguaje de la Aritmética Formalizada. Las primeras cinco ya dimos su prueba y por tanto solamente las enunciamos.

Es momento de recordar que tenemos una codificación de nuestro lenguaje formal \mathcal{L}_{AP} en los números naturales, \mathbb{N} , llamada numeración de Gödel.

$$g : \mathcal{L}_{AP} \cup EXP_{AP} \cup {}^{\omega}EXP_{AP} \rightarrow \mathbb{N}$$

dada por $g = g_1 \cup g_2 \cup g_3$, donde

$$g_1 : \mathcal{L}_{AP} \rightarrow \mathbb{N} \quad g_2 : EXP_{AP} \rightarrow \mathbb{N} \quad g_3 : {}^{\omega}EXP_{AP} \rightarrow \mathbb{N}$$

Proposición_∞. Las siguientes relaciones y operaciones son recursivas primitivas.

1. $PRM \subseteq \mathbb{N}$ es el conjunto de números primos. Así, $PRM(x)$ syss x es un número primo.
2. $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, donde $p(n) = P_n$ y es el n -ésimo primo en orden ascendente.
3. Para cada $j \in \mathbb{N}$, la función $[\]_j : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ está definida como sigue:

$$[x]_j = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ a_j & \text{si } x = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \dots \cdot P_j^{a_j} \cdot P_{j+1}^{a_{j+1}} \cdot \dots \end{cases}$$

Ojo: $[x]_j = 0$ syss $\neg(P_j \mid x) \vee x \leq 1$

4. Las siguientes funciones indistintamente las llamaremos *Longitud de un número*.
 - a). La función $ld : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, nos da para un $a > 1$, el número de primos –distintos– que lo dividen, o equivalentemente, el número de exponentes no–cero en la factorización en potencias de números primos.

$$ld(x) = \sum_{j \leq x} sg([x]_j)$$

Obsérvese que $ld(0) = 0 = ld(1)$.

- b). La función $lg : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, nos da el índice del (primer) primo que no lo divide y que ningun otro primo mayor tampoco lo divida.

$$lg(x) = \mu_{y < n} \left[\forall z < n \left(z \geq y \Rightarrow (\neg(P_z \mid x)) \right) \right]$$

Osérvese que $lg(0) = 0 = lg(1)$.

5. La función binaria \star , llamada *Concatenación*, queda definida como sigue:

$$x \star y = x \cdot \prod_{j < lg(y)} (P_{lg(x)+j})^{[y]_j}$$

Observando que, si

$$x = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \dots \cdot P_n^{a_n} \quad y \quad y = P_0^{b_0} \cdot P_1^{b_1} \cdot \dots \cdot P_m^{b_m}$$

con $a_i \neq 0$ y $b_j \neq 0$, entonces

$$x \star y = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \dots \cdot P_n^{a_n} \cdot P_{n+1}^{b_0} \cdot P_{n+2}^{b_1} \cdot \dots \cdot P_{n+m+1}^{b_m}$$

6. a). La función $pp : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, llamada *Poner Paréntesis*, trabaja de la siguiente manera.

Si E es una AP-expresión y su número de secuencia es x , e.d. $g_2(E) = x$, entonces $pp(x)$ es el número de secuencia de la expresión “(E)” y así, $pp(x) = g_2((E))$. Es recursiva pues,

$$pp(x) = 2^{g_1(0)} \star x \star 2^{g_1(0)}$$

b) La función $ppc : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, llamada *poner paréntesis con coma*, trabaja de la siguiente manera. Si E y F son AP-expresiones tales que $g_2(E) = x$ y $g_2(F) = y$, entonces $ppc(x,y) = g_2((E,F))$. Esta es recursiva pues,

$$ppc(x,y) = pp(x \star 2^{g_1(0)} \star y)$$

7. $VAR \subseteq \mathbb{N}$. $VAR(x)$ syss x es el número de secuencia de una variable de \mathcal{L}_{AP} .

$$VAR(x) \text{ syss } \exists y < x \left(x = 2^{g_1(v_y)} \right)$$

8. $TERM \subseteq \mathbb{N}$. $TERM(x)$ syss x es el número de secuencia de un AP-término.

$$TERM(x) \text{ syss } VAR(x) \vee \left(x = 2^{g_1(C_0)} \right) \vee$$

$$\vee \exists y < x \left[TERM(y) \wedge (x = 2^{g_1(s)} \star pp(y)) \right]$$

$$\vee \exists y < x \exists z < x \left[TERM(y) \wedge TERM(z) \wedge (x = 2^{g_1(f_+)} \star ppc(y,z)) \right]$$

$$\vee \exists y < x \exists z < x \left[TERM(y) \wedge TERM(z) \wedge (x = 2^{g_1(f_-)} \star ppc(y,z)) \right]$$

TAREA: Probar que $TERM$ es una **R.R.** (Sug. usar recursión por curso de valores).

9. $ATOM \subseteq \mathbb{N}$. $ATOM(x)$ syss x es el número de secuencia de una fórmula atómica de \mathcal{L}_{AP} .

$$ATOM(x) \text{ syss } \exists y < x \exists z < x \left[TERM(y) \wedge TERM(z) \wedge (x = pp(y \star 2^{g_1(\approx)} \star z)) \right]$$

10. La función $neg : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, trabaja de la siguiente manera.

Si $E \in EXP_{AP}$ y $g_2(E) = x$, entonces $neg(x) = g_2(\neg E)$.

$$neg(x) = pp(2^{g_1(\neg)} \star x)$$

11. La función $imp : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, trabaja de la siguiente manera. Si $E, F \in EXP_{AP}$ con $g_2(E) = n$, y $g_2(F) = m$, entonces $imp(n, m) = g_2(E \rightarrow F)$.

$$imp(x, y) = pp(x \star 2^{g_1(\rightarrow)} \star y)$$

12. La función $cu : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, trabaja de la siguiente manera.

Si $E \in EXP_{AP}$ con $g_2(E) = m$, entonces $cu(n, m) = g_2(\forall v_n E)$.

$$cu(x, y) = pp\left(\left(2^{g_1(\forall)} \cdot 3^{g_1(v_x)}\right) \star y\right)$$

13. $FORM \subseteq \mathbb{N}$.

$FORM(x)$ syss x es el número de secuencia de una Fórmula de \mathcal{L}_{AP} .

$$FORM(x) \text{ syss } ATOM(x) \vee$$

$$\vee \left[\exists y < x \left(FORM(y) \wedge x = neg(y) \right) \right]$$

$$\vee \left[\exists y < x \exists z < x \left(FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge x = imp(y, z) \right) \right]$$

$$\vee \left[\exists y < x \exists z < x \left(FORM(y) \wedge x = cu(z, y) \right) \right]$$

TAREA: Probar que $FORM$ es una R.R. (Sug. usar recursión por curso de valores)

14. $MP \subseteq \mathbb{N}^3$. $MP(x, y, z)$ syss z es el número de secuencia de una fórmula que se obtiene por la regla de Modus Ponens de las fórmulas cuyos números de secuencia son x e y .

$$MP(x, y, z) \text{ syss } FORM(x) \wedge FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge$$

$$\wedge \left[y = imp(x, z) \vee x = imp(y, z) \right]$$

15. $GEN \subseteq \mathbb{N}^2$. $GEN(x, y)$ syss y es el número de secuencia de una fórmula que se obtuvo por la regla de Generalización aplicada a la fórmula con número de secuencia x .

$$GEN(x, y) \text{ syss } FORM(x) \wedge FORM(y) \wedge \exists z < y \left[y = cu(z, x) \right]$$

16. Axiomas Lógicos (primera parte).

a) $AL1(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL**₁.

$$AL1(x) \text{ syss } \exists y < x \exists z < x \left[FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge \left(x = imp(y, imp(z, y)) \right) \right]$$

b) $AL2(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL**₂.

$$AL2(x) \text{ syss } \exists y < x \exists z < x \exists w < x \left[FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge FORM(w) \wedge \right. \\ \left. x = imp\left(imp(y, imp(z, w)), imp(imp(y, z), imp(y, w)) \right) \right]$$

c) $AL3(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL**₃.

$$AL3(x) \text{ syss } \exists y < x \exists z < x \left[FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge \right. \\ \left. x = imp\left(imp(neg(y), neg(z)), imp(imp(neg(y), z), y) \right) \right]$$

f) $AL6(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL**₆.

$$AL6(x) \text{ syss } x = cu\left(0, pp(2^{g_1(v_0)} \cdot 3^{g_1(\approx)} \cdot 5^{g_1(v_0)}) \right)$$

Quedan pendientes los demás axiomas lógicos.

17. Axiomas Propios. Axiomas de Peano, AP (primera parte).

a). $AP1(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP**₁.

$$AP1(x) \text{ syss } x = cu\left(0, neg\left(pp\left(2^{g_1(f_s)} \star pp(2^{g_1(v_0)}) \star 2^{g_1(\approx)} \star 2^{g_1(c_0)} \right) \right) \right)$$

b). $AP2(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP**₂.

$$AP2(x) \text{ syss } x = cu\left(0, cu\left(1, imp(n, m) \right) \right)$$

Donde,

$$n = pp\left(2^{g_1(f_s)} \star pp(2^{g_1(v_0)}) \star 2^{g_1(\approx)} \star 2^{g_1(f_s)} \star pp(2^{g_1(v_1)}) \right)$$

y

$$m = pp\left(2^{g_1(v_0)} \cdot 3^{g_1(\approx)} \cdot 5^{g_1(v_1)} \right)$$

c). $AP3(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP**₃.

$$AP3(x) \text{ syss } x = \dots$$

d). $AP4(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP**₄.

$$AP4(x) \text{ syss } x = \dots$$

e). $AP5(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma AP_5 .
 $AP5(x)$ syss $x = \dots$

f). $AP6(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma AP_6 .
 $AP6(x)$ syss $x = \dots$

Quedan como **Ejercicio** terminar c) a d)

El esquema axiomático de Inducción lo veremos más adelante.