18. $VOP \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOP(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en la AP–expresión con número de secuencia m, en la **P**osición p.

$$VOP(n,m,p) \text{ syss } \Big([m]_p = g_1(v_n) \Big)$$

19. $VOF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOF(n,m)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en la AP–**F**órmula con número de secuencia m.

$$VOF(n,m) \text{ syss } FORM(m) \wedge \exists y < lg(m) \Big[\; VOP\big(n,\ m,\ y\big) \; \Big]$$

20. **0**) $VOAP1 \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOAP1(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en la AP–expresión con número de secuencia m en la **P**osición p y es la variable del cuantificador universal $\forall v_n$.

$$VOAP1(n,m,p) \text{ syss } VOP(n,m,p) \wedge \Big([m]_{p \dot{-} 1} = g_1(\forall) \Big)$$

00) $VOAP2 \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOAP2(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en la AP–expresión con número de secuencia m en la **P**osición p y está en el alcance del cuantificador universal $\forall v_n$.

$$\begin{aligned} VOAP2(n,m,p) \quad & \text{syss } VOP(n,m,p) \wedge \\ & \wedge \ \exists x < m \ \exists y < m \ \exists z < m \Big[\Big(m = x \star cu(n,y) \star z \Big) \wedge \\ & \wedge \ VOP\Big(n,\ y\ ,\ p \dot{-} (lg(x)+3)\Big) \Big] \end{aligned}$$

Obsérvese que queda contemplado el caso en que la fórmula, con número de secuencia m, sea la cuantificación universal $\forall v_n$ de otra fórmula (es el caso $x = 1 = z$ y recordando que $1 \star a = a = a \star 1$ y que $lg(1) = 0$).

a) $VOAP \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOAP(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre **A**cotada en la AP–expresión con número de secuencia m en la **P**osición p.

$$VOAP(n,m,p) \text{ syss } VOAP1(n,m,p) \vee VOAP2(n,m,p)$$

b) $VOAF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOAF(n,m)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre **A**cotada en la AP–**F**órmula con número de secuencia m.

$$VOAF(n,m) \text{ syss } FORM(m) \wedge \exists y < lg(m) \Big[\; VOAP(n,m,y) \; \Big]$$

21. **a**) $VOLP \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOLP(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre **L**ibre en la AP–expresión con número de secuencia m en la **P**osición p.

$$VOLP(n,m,p) \text{ syss } VOP(n,m,p) \wedge \neg VOAP(n,m,p)$$

b) $VOLF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOLF(n,m)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre **L**ibre en la AP–**F**órmula con número de secuencia m.

$$VOLF(n,m) \text{ syss } FORM(m) \wedge \exists y < lg(m) \left[\; VOLP(n,m,y) \; \right]$$

22. $SFRM \subseteq \mathbb{N}^2$. $SFRM(n,m)$ syss n es el número de secuencia de una **S**ub**F**ó**RM**ula de la AP–fórmula con número de secuencia m.

$$\begin{aligned} SFRM(n,m) \quad \text{syss} \quad & FORM(n) \wedge FORM(m) \wedge \\ & \wedge \;\; \exists x < m \, \exists y < m \left[\; m = x \star n \star y \; \right] \end{aligned}$$

Para el caso en que la subfórmula sea ella misma, $n = m$, la observación hecha en **20.00**) es aplicable.

23. $VOT \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOT(n,q)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en el AP–**T**érmino con número de secuencia q.

$$VOT(n,q) \text{ syss } TERM(q) \wedge \exists y < lg(q) \left[\; VOP(n,q,y) \; \right]$$

24. $TLVF \subseteq \mathbb{N}^3$. $TLVF(q,n,m)$ syss el **T**érmino, con número de secuencia q, es **L**ibre para la **V**ariable v_n en la AP–**F**órmula con número de secuencia m.

$$\begin{aligned} & TLVF(q,n,m) \\ \text{syss} \quad & TERM(q) \wedge FORM(m) \wedge \\ & \wedge \neg \exists x \leq q \, \exists y \leq m \, \exists z < m \Big[VOT\big(x,\, q\big) \wedge SFRM\big(y,\, m\big) \wedge y = cu\big(x,\, z\big) \wedge \\ & \qquad \wedge \forall w \leq m \Big(SFRM\big(w,\, m\big) \wedge SFRM\big(y,\, w\big) \;\Rightarrow\; VOLF\big(n,\, w\big) \Big) \Big] \end{aligned}$$

25. Quisieramos tener una función $pol : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, la cual trabaje de la siguiente manera, Si $pol(n,m,k) = p$, entonces la k–ésima **O**currencia **L**ibre de v_n, en la AP–expresión con número de secuencia m, ocupa la **P**osición p.

Ejemplo: Sea $m = g_2(\varphi)$, donde φ es la AP–fórmula,

$$\Big(\forall v_{28}(v_{28} \approx v_{35}) \;\to\; (f_s(v_{35}) \approx v_{28}) \Big)$$

Tenemos la siguiente situación:

k	$\leftrightharpoons$							0						1			0		
φ	$=$	(	$\forall$	v_{28}	(	v_{28}	$\approx$	v_{35}	)	$\to$	(	f_s	(	v_{35}	)	$\approx$	v_{28}	)	)
p	$\leftrightharpoons$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Así tendríamos que,

$$pol(35,m,0) = 6 \qquad pol(35,m,1) = 12 \qquad pol(28,m,0) = 15$$

En los casos en que, la variable no ocurra o sus ocurrencias sean todas acotadas o que no hubiera una k–ésima ocurrencia libre de la variable, el valor que tome la función pol no importa —con tal de que no nos meta en problemas. Una buena solución, y que nos servirá más adelante, es que tome como valor a la $lg(m)$.

En nuestro ejemplo, $pol(41,m,k) = lg(m) = 18,$ para toda k. Y para toda $k \geq 1,$ tendríamos que $pol(28,m,k) = lg(m) = 18.$

Podemos definir pol recursivamente, a partir de recursivas, como sigue:

$$pol\big(n,\ m,\ 0\big) \;=\; \mu_{y<lg(m)}\Big[\ VOLP\big(n,\ m,\ y\big)\ \Big]$$

$$pol\big(n,\ m,\ k^{+}\big) \;=\; \mu_{y<lg(m)}\Big[VOLP(n,m,y)\ \wedge\ y > pol(n,m,k)\Big]$$

26. Queremos una función $nol : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},$ la cual trabaje de la siguiente manera: Si $nol(n,m) = l,$ entonces la variable v_n **O**curre **L**ibre en la AP–expresión con número de secuencia $m,$ un **N**úmero l de veces.

En el ejemplo anterior tendríamos:
$nol(28,m) = 1,$ $nol(35,m) = 2$ y $nol(41,m) = 0.$

La función nol es recursiva pues,

$$nol(n,m) = \sum_{y<lg(m)} \overline{sg}\Big(\ \mathcal{C}_{VOLP}(n,m,y)\ \Big)$$

donde $\mathcal{C}_{VOLP}$ es la función característica de $VOLP$. Otra respuesta posible es,

$$nol(n,m) = \mu_{y<lg(m)}\Big[pol(n,m,y) \;=\; lg(m)\Big]$$

27. Queremos una función $remp : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},$ la cual trabaje de la siguiente manera: Si n y m son números de secuencia de dos AP–expresiones, digamos E y F respectivamente y si $remp(n,m,p) = k,$ entonces k es el número de secuencia de la AP–expresión que se obtiene de $E,$ al **RE**e**M**plazar el símbolo que ocurre en la **P**osición $p,$ por la AP–expresión $F.$
Un ejemplo: Si $E \leftrightharpoons f_{+}\big(v_0,\ c_0\big) \approx c_0$ y $F \leftrightharpoons f_s(c_0)$ donde $g_2(E) = n$ y $g_2(F) = m,$ entonces

$remp(n,m,3) = g_2\Big(f_{+}\big(f_s(c_0),\ c_0\big) \approx c_0\ \Big)$ y
$remp(n,m,2) = g_2\Big(f_{+}f_s(c_0)v_0,\ c_0) \approx c_0\ \Big)$
La función $remp$ es recursiva pues,

$$remp(n,m,p) = \prod_{i<p} P_i^{[n]_i} \star m \star \prod_{j<lg(n)\dot{-}p^{+}} P_j^{[n]_{j+p^{+}}}$$

¿ Qué ocurre si $p \geq lg(n)$?
R: $remp(n,m,p) = (n \cdot 1) \star m \star 1 = n \star m.$

28. **a**) Queremos una función $sus : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ tal que si $sus(n,m,k,l) = o$, entonces o es el número de secuencia de la AP–expresión que resulta de **SUS**tituir las primeras l ocurrencias libres de la variable v_m por la AP–expresión con número de secuencia k en la AP–expresión con número de secuencia n.
La función sus queda definida recursivamente, a partir de recursivas, como sigue:

$$\begin{aligned} sus(n,m,k,0) &= n \\ sus(n,m,k,l^+) &= remp\Big(sus(n,m,k,l),\ \ k\ \ , pol(m,n,l) + l \cdot lg(k)\Big) \end{aligned}$$

b) Queremos una función $sst : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}.$ tal que si $sst(n,m,k) = z,$ entonces z es el número de secuencia de la AP–expresión que resulta de **S**u**S**tituir **T**odas las ocurrencias libres de la variable v_m por la AP–expresión con número de secuencia k en la AP–expresión con número de secuencia n.

$$sst(n,m,k) = sus(n,m,k,nol(m,n))$$

29. **i**) Axiomas Lógicos (segunda parte).

d) $AL4(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo $\mathbf{AL}_4$:

$$AL4(x) \text{ syss } \exists y < x\, \exists z < x\, \exists w < x \Big[TLVF(y,z,w) \ \wedge \\ \wedge\ x = imp\big(cu(z,w),\ sst(w,z,y)\big) \Big]$$

e) $AL5(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo $\mathbf{AL}_5$:

$$AL5(x) \text{ syss } \exists y < x\, \exists z < x\, \exists w < x \Big[FORM(y) \ \wedge\ FORM(z) \ \wedge\ \neg VOLF(w,y) \ \wedge \\ \wedge\ x = imp\Big(cu\big(w,\ imp(y,z)\big)\ ,\ imp\big(y,\ cu(w,z)\big)\Big) \Big]$$

g) $AL7(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo $\mathbf{AL}_7$:

$AL7(x)$ syss ... **T A R E A**.

ii) $AL \subseteq \mathbb{N}$.

$AL(x)$ syss x es el número de secuencia de un **A**xioma **L**ógico.

$$AL(x) \text{ syss } AL1(x) \vee \ldots \vee AL7(x)$$

30. Axiomas Propios. Axiomas de Peano, AP (segunda parte).

i) $API(n)$ syss n es el número de secuencia de una fómula perteneciente al grupo de axiomas de **PI** (Principio de Inducción).

$$API(n)$$

$$\text{syss} \quad \exists x < n \, \exists y < n \Big[FORM(x) \ \wedge \ VOLF(y,x) \wedge$$
$$\wedge \quad n = imp\Big(sst(x,y,2^{g_1(c)}) \ ,$$
$$imp\Big(cu\Big(y \ , \ imp\Big(x \ , \ sst(x,y,2^{g_1(f_s)} \star pp(2^{g_1(v_y)})) \Big) \Big) \ , \ cu(y,x) \Big) \Big) \Big]$$

ii) $AAP \subseteq \mathbb{N}$.

$AAP(n)$ syss n es el número de secuencia de un axioma propio del sistema **A**xiomático de **AP**.

$$AAP(n) \quad \text{syss} \quad AP1(n) \vee \ \dots \ \vee AP6(n) \vee API(n)$$

31. $PRU \subseteq \mathbb{N}^2$.

$PRU(n,m)$ syss n es el número de gödel de una sucesión finita de AP–fórmulas la cual es una prueba en el sistema —en nuestro caso el de Mendelson— de la fórmula con número de secuencia m.

$$PRU(n,m) \quad \text{syss} \quad FORM(m) \ \wedge \ [n]_{lg(n)\dot{-}1} = m \ \wedge \ \forall i < lg(n) \Big[FORM([n]_i) \ \wedge$$
$$\wedge \ \Big(AL([n]_i) \ \vee \ AAP([n]_i) \ \vee \ \exists j < i \, \exists k < i \, \Big(MP\Big([n]_j,[n]_k,[n]_i\Big)\Big)$$
$$\vee \ \exists j < i \, \Big(GEN\Big([n]_j,[n]_i\Big)\Big)\Big)\Big]$$

†

Surge la pregunta ¿la propiedad “ser un teorema, en AP” es recursiva? Veamos.

$TEO \subseteq \mathbb{N}$. $TEO(m)$ syss m es el número de gödel de una fórmula la cual es un **TEO**rema, en el sistema AP.

Podríamos intentar ver que es recursivo, de la siguiente manera:

$$TEO(m) \quad \text{syss} \quad \exists x \Big[\ PRU(x,m) \ \Big]$$

Pero el cuantificador ¡no lo podemos acotar! Esto nos impide el probar –por éste camino, al menos– que TEO sea una propiedad recursiva.

De hecho, TEO **NO** es recursiva. Queda pendiente probarlo.