

## Recursión por Curso de Valores

Muchas veces es necesario definir funciones por recursión las cuales el valor de  $f(x_1, \dots, x_n, y^+)$  depende no solamente del valor tomado en  $y$ , es decir de  $f(x_1, \dots, x_n, y)$ , sino también de algunos o todos los valores de  $f(x_1, \dots, x_n, u)$  con  $u \leq y$ . Este tipo de recursión se llama *Recursión por Curso de Valores*.

Como ejemplo, tenemos la Sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., la podemos definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ F(0) &= 1 \\ F(1) &= 1 \\ F(y+2) &= F(y) + F(y+1) \end{aligned}$$

Este método de definición, Recursión por Curso de Valores, es aceptado –y si se desea, se puede justificar por métodos conjuntistas. No es nuestra intención dar una prueba de ello, lo que nos interesa es ver que este método es Recusivo (Primitivo). Para ello,

**Definición<sub>1</sub>.** Para cada  $f: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ , hay una función asociada,  $f_{\#}: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ , la cual está definida de la siguiente manera,

$$f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y) = \prod_{z < y} P_z^{f(x_1, \dots, x_n, z)}$$

### Observaciones:

1. i).  $f_{\#}(x_1, \dots, x_n, 0) = 1$ . Y
- ii).  $f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y^+) = P_0^{f(x_1, \dots, x_n, 0)} \cdot \dots \cdot P_y^{f(x_1, \dots, x_n, y)}$

2. Si  $u < y$ , entonces

$$f(x_1, \dots, x_n, u) = \left[ \prod_{z < y} P_z^{f(x_1, \dots, x_n, z)} \right]_u = \left[ f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y) \right]_u$$

3. Si tuvieramos a la función  $f_{\#}$ , podríamos obtener a la original pues, para cualquier  $y$  se tiene,

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = \left[ f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y^+) \right]_y$$

Veamos cómo trabaja la función # en nuestro ejemplo de la sucesión de Fibonacci.

1.  $F_{\#}(0) = 1$
2.  $F_{\#}(1) = P_0^{F(0)} = 2^1$
3.  $F_{\#}(2) = P_0^{F(0)} \cdot P_1^{F(1)} = 2^1 \cdot 3^1$
4.  $F_{\#}(3) = P_0^{F(0)} \cdot P_1^{F(1)} \cdot P_2^{F(2)} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$
5.  $F_{\#}(4) = P_0^{F(0)} \cdot P_1^{F(1)} \cdot P_2^{F(2)} \cdot P_3^{F(3)} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3$
- ⋮

Tedríamos, por ejemplo que  $F(3) = [F_{\#}(4)]_3 = 2$ .

La función  $f_{\#}$  es una especie de “archivo” que va guardando la información que la función original va tomando.

**Proposición<sub>2</sub>.** Sea  $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ . Así,

La función  $f$  es una **FR** syss la función  $f_{\#}$  es una **FR**.

**Prueba:** La “ida” es inmediata de la definición de  $f_{\#}$ ; es el producto acotado de una **FR**. El “regreso” se debe a que  $f$  se obtiene, ver el punto 3 de **Observaciones**, por Sustitución’ a partir de las recursivas  $[\ ]_-$  y de  $f_{\#}, (\ )^+$ . †

**Proposición<sub>3</sub>.** (Recursión por Curso de Valores)

Sean  $H : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$  y  $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$  tales, que

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = H(x_1, \dots, x_n, y, f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y))$$

Si  $H$  es una **FR**, entonces  $f$  también es una **FR**.

**Prueba:** Gracias a Sustitución’, basta ver que  $f_{\#}$  es una **FR**.

La función  $f_{\#}$  se puede obtener por recusión pues,

- i).  $f_{\#}(x_1, \dots, x_n, 0) = 1$
- ii).  $f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y^+) = f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y) \cdot P_y^{f(x_1, \dots, x_n, y)}$  Def.  $f_{\#}$   
 $= f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y) \cdot P_y^{H(x_1, \dots, x_n, y, f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y))}$  Hip

Ahora, si definimos la función  $G : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$  como,

$$G(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, z_{n+2}) = z_{n+2} \cdot \exp(P_{z_{n+1}}, H(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, z_{n+2}))$$

resulta que  $G$  es una **FR**, pues se obtiene por Sustitución’ a partir de **FR**. Finalmente, como  $f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y^+) = G(x_1, \dots, x_n, y, f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y))$ , tenemos que  $f_{\#}$  se obtiene por Recusión a partir de las recursivas  $C_1^n$  y  $G$ . †

Obsérvese que

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = H(x_1, \dots, x_n, y, f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y)) = \left[ f_{\#}(x_1, \dots, x_n, y^+) \right]_y$$

Volvamos con el ejemplo de la Sucesión de Fibonacci. La función  $F$  es una **FR**, pues la podemos obtener como sigue:

$$F(y) = \overline{sg}(y) + \overline{sg}(|y - 1|) + sg(y \dot{-} 1) \cdot ([F_{\#}(y)]_{y \dot{-} 1} + [F_{\#}(y)]_{y \dot{-} 2})$$

La función

$$H(y, z) = \overline{sg}(y) + \overline{sg}(|y - 1|) + sg(y \dot{-} 1) \cdot ([z]_{y \dot{-} 1} + [z]_{y \dot{-} 2})$$

es una **FR** y  $F(y) = H(y, F_{\#}(y))$ .

Veamos como trabaja,

1.  $F_{\#}(0) = 1$
2.  $F_{\#}(1) = F_{\#}(0) \cdot P_0^{H(0, F_{\#}(0))} = 1 \cdot 2^1 = 2^1$
3.  $F_{\#}(2) = F_{\#}(1) \cdot P_1^{H(1, F_{\#}(1))} = 2^1 \cdot P_1^1 = 2^1 \cdot 3^1$
4.  $F_{\#}(3) = F_{\#}(2) \cdot P_2^{H(2, F_{\#}(2))} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot P_2^{H(2, F_{\#}(2))}$  Y como,
 
$$H(2, F_{\#}(2)) = 0 + 0 + 1 \cdot ([F_{\#}(2)]_{2 \dot{-} 1} + [F_{\#}(2)]_{2 \dot{-} 2})$$

$$= [F_{\#}(2)]_1 + [F_{\#}(2)]_0 = 1 + 1$$

Por tanto,  $F_{\#}(3) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot P_2^{1+1} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

5.  $F_{\#}(4) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^{1+2} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3$

Ahora calculemos, por ejemplo  $F(3)$ .

a) Usando la **Observación**<sub>3</sub> :  $F(3) = [F_{\#}(4)]_3 = [2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3]_3 = 3$

b) Usando la función  $H$  :

$$F(3) = H(3, F_{\#}(3)) = 0 + 0 + 1 \cdot ([F_{\#}(3)]_{3 \dot{-} 1} + [F_{\#}(3)]_{3 \dot{-} 2})$$

$$= [F_{\#}(3)]_2 + [F_{\#}(3)]_1 = 2 + 1 = 3$$

La recursión por curso de valores también la tenemos para relaciones.

**Proposición**<sub>4</sub>. (Recursión por Curso de Valores para Relaciones)

Sean  $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$  y  $S \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$  tales que

$$R(x_1, \dots, x_n, y) \text{ syss } S(x_1, \dots, x_n, y, (C_R)_{\#}(x_1, \dots, x_n, y))$$

donde la  $C_R$  es la función característica de la relación  $R$ . Así, si  $S$  es una **RR**, entonces  $R$  también será una **RR**.

**Prueba:** Sea  $C_S$  la característica de  $S$  y supongamos que  $S$  es una **RR**. Tenemos,

$$C_R(x_1, \dots, x_n, y) = C_S(x_1, \dots, x_n, y, (C_R)_\#(x_1, \dots, x_n, y))$$

Ya que la función  $C_S$  es una **FR**, la proposición anterior nos garantiza que  $C_R$  también es una **FR** y por tanto  $R$  es una **RR**. †

Para ver un ejemplo, recordemos que bajo la suposición de que  $u < y$ ,

$$\left[ (C_R)_\#(x_1, \dots, x_n, y) \right]_u = C_R(x_1, \dots, x_n, u)$$

por lo que, para  $u < y$ ,

$$\begin{aligned} R(x_1, \dots, x_n, u) & \text{ syss } C_R(x_1, \dots, x_n, u) = 0 \\ & \text{ syss } \left[ (C_R)_\#(x_1, \dots, x_n, y) \right]_u = 0 \end{aligned}$$

Parte de la tarea:

Así, a la hora de probar que  $TERM$  es una **RR**, podemos hacerlo por curso de valores, de la siguiente manera: En vez de escribir,

$$\begin{aligned}
 TERM(x) \text{ syss } & VAR(x) \vee (x = 2^{g_1(C)}) \vee \\
 & \vee \exists y < x \left[ TERM(y) \wedge (x = 2^{g_1(f_s)} \star pp(y)) \right] \\
 & \vee \exists y < x \exists z < x \left[ TERM(y) \wedge TERM(z) \wedge (x = 2^{g_1(f_+)} \star ppc(y,z)) \right] \\
 & \vee \exists y < x \exists z < x \left[ TERM(y) \wedge TERM(z) \wedge (x = 2^{g_1(f_\cdot)} \star ppc(y,z)) \right]
 \end{aligned}$$

escribimos así,

$$\begin{aligned}
 TERM(x) \text{ syss } & VAR(x) \vee (x = 2^{g_1(C_0)}) \vee \\
 & \vee \exists y < x \left[ \left[ \left( C_{TERM} \right)_{\#} (x) \right]_y = 0 \wedge (x = 2^{g_1(f_s)} \star pp(y)) \right] \\
 & \vee \exists y < x \exists z < x \left[ \left[ \left( C_{TERM} \right)_{\#} (x) \right]_y = 0 \wedge \left[ \left( C_{TERM} \right)_{\#} (x) \right]_z = 0 \wedge \dots \right] \\
 & \vee \exists y < x \exists z < x \left[ \left[ \left( C_{TERM} \right)_{\#} (x) \right]_y = 0 \wedge \dots \right]
 \end{aligned}$$

En forma similar ocurre en la prueba de que  $FORM$  es una **RR**. Basta, para  $y < x$  y para  $z < y$ , quitar  $FORM(y)$  y  $FORM(z)$  y poner en su lugar  $\left[ \left( C_{FORM} \right)_{\#} (x) \right]_y = 0$  y  $\left[ \left( C_{FORM} \right)_{\#} (x) \right]_z = 0$  respectivamente.