

## $\beta$ de Gödel

En esta sección construiremos el enunciado de Gödel el cual es un indecidible para nuestra axiomatización de la Aritmética,  $AP$ . Empezamos con la autoreferencia, o mejor dicho, con la “diagonalización”.

**32.**  $nml : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

$nml(k)$  nos proporciona el número de secuencia del numeral del natural  $k$ , es decir:  $nml(k) = g_2(\bar{k})$ . Esta es recursiva, pues:

$$\begin{aligned} nml(0) &= 2^{g_1(c_0)} \\ nml(k^+) &= 2^{g_1(f_s)} \star pp(nml(k)) \end{aligned}$$

**Definición<sub>1</sub>.** Dada una fórmula  $\alpha$ , la *Diagonalización de  $\alpha$  en la variable  $v_k$* , es la fórmula que se obtiene al sustituir todas las ocurrencias libres de  $v_k$  en  $\alpha$ , por el numeral del número de secuencia de  $\alpha$ . Así, si  $g_2(\alpha) = m$ , entonces la diagonalización de  $\alpha$  en  $v_k$  es  $\alpha(v_k / \bar{m})$ .

**33.**  $diag : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ .

Si  $m$  es el número de secuencia de una  $AP$ -expresión, digamos  $\alpha$ , entonces  $diag(m, k)$  nos da el número de secuencia de la diagonalización de  $\alpha$  en  $v_k$ . Es recursiva, pues:

$$diag(m, k) = sst(m, k, nml(m))$$

**34.**  $PR \subseteq \mathbb{N}^3$ .

$PR(n, m, k)$  syss  $n$  es el número de gödel,  $g_3$ , de una sucesión de fórmulas la cual es una prueba, en el sistema  $AP$ , de la diagonalización de la fórmula con número de secuencia  $m$ , en la variable  $v_k$ . Esta es recursiva, pues:

$$PR(n, m, k) \text{ syss } PRU(n, diag(m, k))$$

Tenemos que  $PR \subseteq \mathbb{N}^3$  y es recursiva, por tanto, es expresable en  $AP$  por una fórmula con exactamente tres variables libres, digamos  $\alpha_{PR}(v_0, v_1, v_2)$ . Así, si  $n, m, k \in \mathbb{N}$ , entonces:

**R<sub>1</sub>** Si  $PR(n, m, k)$ , entonces  $AP \vdash \alpha_{PR}(v_0 / \bar{n}, v_1 / \bar{m}, v_2 / \bar{k})$ , o

**R<sub>2</sub>** Si  $\neg PR(n, m, k)$ , entonces  $AP \vdash \neg \alpha_{PR}(v_0 / \bar{n}, v_1 / \bar{m}, v_2 / \bar{k})$ .

Consideremos ahora la siguiente fórmula, la cual tiene a  $v_1$  como única variable libre:

$$\beta(v_1) \Leftrightarrow \forall v_0 \neg \alpha_{PR} (v_0, v_1, v_2 / \bar{1})$$

Ahora tomemos la digonalización de  $\beta(v_1)$  en  $v_1$ . Sea  $g$  el número de secuencia de  $\beta(v_1)$  es decir,  $g = g_2(\beta(v_1))$  y obtenemos el enunciado siguiente,

$$\beta(v_1 / \bar{g}) \Leftrightarrow \forall v_0 \neg \alpha_{PR} (v_0, v_1 / \bar{g}, v_2 / \bar{1})$$

Llamado “La  $\beta$  de Gödel”.

Intentemos interpretar a la  $\beta$  en  $\mathbb{N}$ . Lo que “dice” es,

$$\dot{\forall} n \in \mathbb{N}, \neg PR(n, g, 1)$$

o bien,

$$\dot{\forall} n \in \mathbb{N}, \neg PRU(n, diag(g, 1))$$

Lo cual a su vez nos dice,

“ $diag(g, 1)$ ” es indemostrable, en  $AP$ .

pero,  $diag(g, 1) = g_2(\beta(v_1 / \bar{g}))$ ; por lo que la lectura es,

“ $\beta(v_1 / \bar{g})$  es indemostrable en  $AP$ ”

Resumiendo,  $\beta(v_1 / \bar{g})$  dice, *bajo nuestra particular interpretación,*

“soy indemostrable, en  $AP$ ”

Efectivamente, como veremos, el enunciado  $\beta(v_1 / \bar{g})$  no se puede demostrar en  $AP$  y no solo eso, tampoco se puede refutar, es decir su negación,  $\neg \beta(v_1 / \bar{g})$ , también es indemostrable en  $AP$ . Es pues, un enunciado indecidible para  $AP$ . Todo ello bajo la suposición de “cierta” consistencia de  $AP$ . Esto es el **Primer Teorema de Incompletud de Gödel** (1931). Lo probaremos en dos oportunidades.

**Proposición**<sub>S</sub>. (Parte I).

Si  $AP$  es consistente, entonces  $AP \not\vdash \beta(v_1 / \bar{g})$ .

**Prueba:** Se hará por contrapositiva.

Supongamos pues, que  $AP \vdash \beta(v_1 / \bar{g})$ . Así, hay  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in FRM_{AP}$ , que forman una demostración de  $\alpha_k \Leftrightarrow \beta(v_1 / \bar{g})$ , en el sistema  $AP$ . Sea  $n_0 = g_3(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , por tanto:

$$PRU(n_0, g_2(\beta(v_1 / \bar{g})))$$

pero, ya que  $g_2(\beta(v_1 / \bar{g})) = \text{diag}(g, 1)$ , tenemos:

$$PRU(n_0, \text{diag}(g, 1))$$

y por tanto,

$$PR(n_0, g, 1)$$

Ahora bien, como  $\alpha_{PR}$  expresa a  $PR$  en  $AP$ , por  $\mathbf{R}_1$ , tenemos:

$$AP \vdash \alpha_{PR}(v_0 / \bar{n}_0, v_1 / \bar{g}, v_2 / \bar{1})$$

pero, gracias a la regla  $\exists$  —válida en nuestro cálculo de predicados— obtenemos,

$$AP \vdash \exists v_0 \alpha_{PR}(v_0, v_1 / \bar{g}, v_2 / \bar{1})$$

es decir,

$$AP \vdash \neg \forall v_0 \neg \alpha_{PR}(v_0, v_1 / \bar{g}, v_2 / \bar{1})$$

que no es otra cosa que,

$$AP \vdash \neg \beta(v_1 / \bar{g})$$

Y así,  $AP$  es inconsistente. †

Bajo nuestra “peculiar lectura” resulta que “el enunciado  $\beta$  es verdadero y no es demostrable, en la Aritmética de Peano”.

Bien querríamos concluir que ¡la Aritmética de Peano es Incompleta! —bajo la suposición de que es Consistente. Sin embargo, dar una interpretación rigurosa, a la Tarski, del enunciado  $\beta$  en la interpretación canónica,  $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, s, 0 \rangle$ , es casi imposible y por consiguiente no podemos saber si éste es verdadero o es falso.

Lo único que tenemos con nuestra “lectura” son argumentos de plausibilidad de que sea verdadero. Lo que debemos de rescatar de la “lectura”, un valor innegable, es la idea subyacente, que fué la que llevó a Gödel a construirla.

Para la siguiente parte del resultado, necesitamos introducir una nueva noción.

**Definición<sub>2</sub>.** El sistema axiomático  $AP$  es  $\omega$ -Consistente syss para cualquier  $AP$ -fórmula  $\varphi(x)$  se tiene,

$$\text{Si para cada } n \in \mathbb{N}, AP \vdash \varphi(x / \bar{n}), \text{ entonces } AP \not\vdash \neg \forall x \varphi(x)$$

**Observaciones.**

a). Son equivalentes:

1.  $AP$  es  $\omega$ -Consistente.

2. Si para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $AP \vdash \varphi(x / \bar{n})$ , entonces  $AP \not\vdash \exists x \neg\varphi(x)$ . Esto, para cualquier fórmula  $\varphi(x)$ .

3.  $AP \vdash \neg\forall x \varphi(x)$ , entonces hay un  $n \in \mathbb{N}$ ,  $AP \not\vdash \varphi(x / \bar{n})$ . Esto, para cualquier fórmula  $\varphi(x)$ .

b).  $AP$  es  $\omega$ -Inconsistente si y sólo si hay una fórmula  $\varphi(x)$  tal, que

$$\text{para cada } n \in \mathbb{N}, AP \vdash \varphi(x / \bar{n}) \text{ y } AP \vdash \exists x \neg\varphi(x)$$

**Proposición.** Si  $AP$  es  $\omega$ -consistente, entonces  $AP$  es consistente.

**Prueba:** Es inmediata por contrapositiva. †

Procedamos ahora con la segunda parte del primer teorema de incompletud de Gödel.

**Proposición<sub>8</sub>.** (Parte II).

Si  $AP$  es  $\omega$ -consistente, entonces  $AP \not\vdash \neg\beta(v_1 / \bar{g})$ .

**Prueba:** La prueba es directa. Supongamos pues, que  $AP$  es  $\omega$ -consistente.

Así,  $AP$  es consistente y, por la parte I, tenemos que  $AP \not\vdash \beta(v_1 / \bar{g})$ . Con esto tenemos,

$$\neg PR(n, g, 1), \text{ para todo natural } n$$

Y puesto que  $\alpha_{PR}$  expresa a la relación  $PR$  en  $AP$ , por  $\mathbf{R}_2$ , tenemos que,

$$\text{para cada natural } n, AP \vdash \neg\alpha_{PR}(v_0 / \bar{n}, v_1 / \bar{g}, v_2 / \bar{1})$$

Ahora, si consideramos la fórmula  $\varphi(v_0) \equiv \neg\alpha_{PR}(v_0, v_1 / \bar{g}, v_2 / \bar{1})$  y aplicamos la  $\omega$ -consistencia de  $AP$ , obtenemos:  $AP \not\vdash \neg\forall v_0 \neg\alpha_{PR}(v_0, v_1 / \bar{g}, v_2 / \bar{1})$ ; es decir,

$$AP \not\vdash \neg\beta(v_1 / \bar{g})$$
 †

Podemos ahora enunciar el,

**Primer Teorema de Incompletud de Gödel (1931).**

I. Si  $AP$  es consistente, entonces  $AP \not\vdash \beta(v_1 / \bar{g})$ .

II: Si  $AP$  es  $\omega$ -Consistente, entonces  $AP \not\vdash \neg\beta(v_1 / \bar{g})$ .

Por lo que, si  $AP$  es  $\omega$ -Consistente, entonces  $AP$  tiene un indecidible, a saber  $\beta(v_1 / \bar{g})$ , y por tanto Incompleta —Sintácticamente.