Teorema de Gödel-Rosser
(Generalizado)

Berkley Rosser, 5 años después de la prueba dada por Gödel, modifica la construcción y obtiene un enunciado indecidible —para la Aritmética— en el cual solamente se exige la consistencia simple —y no la ω–consistencia— de AP. Aquí veremos una generalización a su resultado.

En lo que sigue consideremos un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \left\{ f_s\,,\, f_+\,,\, f_\cdot\,,\, c_0 \right\} \qquad \text{y} \qquad \left| \rho \right| \leq \aleph_0$$

Donde, c_0 es una constante individual y f_s , f_+ , $f_\cdot$ son letras funcionales, de arida 1 la primera y las restantes, de aridad 2. Estos símbolos podrían ser definibles a partir de los primitivos, las condiciones las impone el enunciado del Teorema de Gödel–Rosser.

Puesto que $\left| \rho \right| \leq \aleph_0$, tenemos que $\left| \mathcal{L}_\rho \right| = \aleph_0$ y se puede construir una

$$g_1 : \mathcal{L}_\rho \rightarrowtail 2\mathbb{N} + 1$$

de tal suerte que dado un número impar sabemos perfectamente si está —o, nó— en la imagen y en tal caso de quién proviene. Por tanto tenemos toda la numeración de Gödel, a saber g_2 y g_3.

Definición$_1$. Sea $T \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Diremos que T es *Recursivamente Axiomatizable* syss hay un $\Gamma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ tal, que

1. $\Gamma^\vdash = T^\vdash$ (A Γ se le llama *un Conjunto de Axiomas para T*). Y
2. $\left\{ g_2(\sigma) \;/\; \sigma \in \Gamma \right\}$ es un conjunto (una **R**elación) **R**ecursivo(a) (**P**rimitivo(a)).

Observación: Si T es Recursivamente Axiomatizable, entonces son **R**elaciones **R**ecursivas (**P**rimitivas) las siguientes,

31. $PRU\big(n, m\big)$ y

34. $PRD\big(n, m, k\big)$ $\big($ syss $PRU\big(n, diag\big(m, k\big)\big)$ $\big)$.

Proposición. (**Teorema de Gödel–Rosser**. 1936)
Sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ tal que:

1. T es Recursivamente Axiomatizable,

2. Toda Relación (Función) Recusiva es Expresable (Representable) en T.

3. **i**). Para toda ρ–fórmula con exactamente una variable líbre, digamos $\varphi(x)$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \varphi\left(x / \overline{0}\right) \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi\left(x / \overline{k}\right) \rightarrow \forall x\left(x \leq \overline{k} \rightarrow \varphi(x) \right)$$

ii). Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \forall x\left(x \leq \overline{k} \ \vee \ \overline{k} \leq x\right)$$

Así, si T es Consistente, entonces T tiene un Indecidible y por tanto es Incompleta.

Lo primero que hay que observar es que nuestro sistema AP, cumple con lo requerido y lo segundo, es que la relación PRD es expresable en cualquier T que cumpla con lo dispuesto y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que lo expresa la fórmula $\alpha_{PRD}\left(v_0, v_1, v_2\right)$.

Prueba: Consideremos la siguiente relación:

35. $PRND \subseteq \mathbb{N}^3$.
$PRND\left(n, m, k\right)$ syss n es el número de gödel de una sucesión finita de fórmulas, la cual es una **PR**ueba, en T, de la **N**egación de la **D**iagonalización de la formula con número de secuencia m, en la variable v_k. Es recursiva,

$$PRND\left(n, m, k\right) \text{ syss } PRU\left(n, neg\left(diag\left(m, k\right)\right)\right)$$

Por tanto, es expresable en el sistema T, digamos por la ρ–fórmula $\alpha_{PRND}\left(v_0, v_1, v_2\right)$. Ahora consideremos la siguiente ρ–fórmula con v_1 como única variable líbre:

$$\gamma(v_1) \rightleftharpoons \forall v_0\left[\alpha_{PRD}\left(v_0, v_1, v_2 / \overline{1}\right) \rightarrow \neg\forall v_l\left(v_l \leq v_0 \rightarrow \neg\alpha_{PRND}\left(v_0 / v_l, v_1, v_2 / \overline{1}\right)\right)\right]$$

donde v_l es la primera variable que no ocurre ni en α_{PRD} ni en α_{PRND}.

Ahora tomemos la digonalización de $\gamma(v_1)$ en v_1. Sea r el número de secuencia de $\gamma(v_1)$, es decir, $r = g_2(\gamma(v_1))$ y obtenemos el enunciado:

$$\gamma\left(v_1 / \overline{r}\right) \rightleftharpoons \forall v_0\left[\alpha_{PRD}\left(v_0, v_1 / \overline{r}, v_2 / \overline{1}\right) \rightarrow \right.$$
$$\left. \rightarrow \neg\forall v_l\left(v_l \leq v_0 \rightarrow \neg\alpha_{PRND}\left(v_0 / v_l, v_1 / \overline{r}, v_2 / \overline{1}\right)\right)\right]$$

Llamado *"El enunciado de Rosser".* (¿Qué dice?)

Las siguientes observaciones nos serán útiles más adelante: Para un $n \in \mathbb{N}$,

$(\mathbf{O}_1)$ $PRD(n, r, 1)$ syss n es el número de gödel de una prueba, en T, de $\gamma(v_1 / \overline{r})$.

$(\mathbf{O}_2)$ $PRND(n, r, 1)$ syss n es el número de gödel de una prueba, en T, de $\neg\gamma(v_1 / \overline{r})$.

Af₁. Si T es consistente, entonces $T \nvdash \gamma(v_1 / \overline{r})$.

Af₂. Si T es consistente, entonces $T \nvdash \neg\gamma(v_1 / \overline{r})$.

Prueba de Af₁: **TAREA**.

Prueba de Af₂: (Por reducción a lo absurdo). Supongamos pues, que T es consistente y con la intensión de llegar a una contradicción, además supongamos,

$$T \vdash \neg\gamma(v_1 / \overline{r}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Así, hay un $k \in \mathbb{N}$, que corresponde a la prueba, en T, de $\neg\gamma(v_1 / \overline{r})$. De $(\mathbf{O}_2)$ tenemos que $PRND(k, r, 1)$ y por la expresabilidad de $PRND$ en T, por $\mathbf{R}_1$, tenemos que,

$$T \vdash \alpha_{PRND}(v_0 / \overline{k},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

De esto podemos obtener,

$$T \vdash \overline{k} \leq v_0 \rightarrow \exists v_l\Big(v_l \leq v_0\ \ \&\ \ \alpha_{PRND}\big(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\big)\Big) \quad \ldots\ldots\ldots (\bigstar)$$

pues:

1. $\overline{k} \leq v_0$ .... Hip.
2. $\alpha_{PRND}(v_0 / \overline{k},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1})$ .... $(**)$
3. $\overline{k} \leq v_0\ \&\ \alpha_{PRND}(v_0 / \overline{k},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1})$ .... de 1 y 2
4. $\exists v_l\Big(v_l \leq v_0\ \ \&\ \ \alpha_{PRND}\big(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\big)\Big)$ .... Regla $\exists$

Con esto tenemos: $T \cup \{\overline{k} \leq v_0\} \vdash \exists v_l\Big(v_l \leq v_0\ \ \&\ \ \alpha_{PRND}\big(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\big)\Big)$. Y usando el metateorema de la dedución, obtenemos $(\bigstar)$.

Por otro lado, puesto que T es consistente y de $(*)$, tenemos que:

$$T \nvdash \gamma(v_1 / \overline{r})$$

Así, por $(\mathbf{O}_1)$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\neg PRD(n, r, 1)$. De esto y la representabilidad de PRD en T, por $\mathbf{R}_1$, tenemos que,

$$\text{Para todo } n \in \mathbb{N},\ T \vdash \neg\alpha_{PRD}\left(v_0 / \overline{n},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right).$$

En particular para los primeros $k+1$ naturales, por tanto

$$T \vdash \neg\alpha_{PRD}\left(v_0 / \overline{0},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)\ \&\ \ldots\ \&\ \neg\alpha_{PRD}\left(v_0 / \overline{k},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)$$

Y puesto que T cumple con la propiedad **3.i**), usando Modus Ponens y después el Axioma de Particularización (**AL**$_4$), obtenemos:

$$T \vdash v_0 \leq \overline{k} \rightarrow \neg\alpha_{PRD}\left(v_0,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\bigstar\bigstar)$$

Ahora bien, T cumple con la propiedad **3.ii**) y si ésta la particularizamos, obtenemos:

$$T \vdash \left(v_0 \leq \overline{k}\right) \vee \left(\overline{k} \leq v_0\right)$$

De esto, ($\bigstar$) y ($\bigstar\bigstar$) obtenemos:

$$T \vdash \neg\alpha_{PRD}\left(v_0,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right) \vee \exists v_l\left(v_l \leq v_0\ \&\ \alpha_{PRND}\left(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)\right)$$

Finalmente, usando generalización y algunas convenciones:

$$T \vdash \forall v_0\left[\alpha_{PRD}\left(v_0,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right) \rightarrow \exists v_l\left(v_l \leq v_0\ \&\ \alpha_{PRND}\left(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)\right)\right]$$

es decir, $T \vdash \gamma\left(v_1 / \overline{r}\right)$, lo cual contradice la consistencia de T. †

Corolario. El Teorema de Gödel-Rosser es cierto para la Aritmética de Peano.

Si AP es Consistente, entonces es Incompleta.

Corolario. En toda extensión recursiva de AP es válido el Teorema de Gödel–Rosser.

Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\rho}^{0}$ tal que,

i). $\Gamma^{\vdash} \supseteq AP$. Y

ii). $\left\{g_2(\sigma)\ /\ \sigma \in \Gamma\right\}$ es un conjunto Recursivo (Primitivo),

Así, si Γ es consistente, entonces $\Gamma^{\vdash}$ es incompleto.

Solo recordamos que hay una petición inicial al Lenguaje Formal; se considera un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \left\{f_s\ , f_+\ , f_\cdot\ , c_0\right\} \text{ y } \left|\ \mathcal{L}_{\rho}\ \right| = \aleph_0$$