

Diagonalización

En lo que sigue consideremos un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \{f_s, f_+, f \cdot, c_0\} \quad \text{y} \quad |\rho| \leq \aleph_0$$

Y sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ recursivamente axiomatizable en el que toda Relación (Función) Recursiva (Primitiva) es Expresable (Representable) en T .

Recordemos:

Def. Dada una fórmula α , la *Diagonalización de α en v_k* , es la fórmula que se obtiene al sustituir todas las ocurrencias libres de la variable v_k en α por el numeral del número de secuencia de α . Así, si $g_2(\alpha) = m$ entonces la diagonalización de α en v_k es $\alpha(v_k / \bar{m})$.

33. $diag : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Si m es el número de secuencia de una fórmula, digamos α , entonces $diag(m, k)$ nos da el número de secuencia de la diagonalización de α en v_k . Es decir, si $g_2(\alpha) = m$, entonces $diag(m, k) = g_2(\alpha(v_k / \bar{m}))$.

De ahora en adelante trabajaremos específicamente con fórmulas con exactamente una variable libre y sin pérdida de generalidad, las fijaremos en la variable v_1 . Siendo consecuentes, la diagonalización de estas fórmulas se reducirá a dicha variable. Y nos referiremos a ella simplemente con el nombre de: “*La diagonalización*”.

Pongamos nueva notación y convenciones:

1. Sea φ es una fórmula con v_1 como única variable libre. Este hecho lo denotaremos poniendo $\varphi(v_1)$ o, en corto, φ . Así como también escribiremos $\varphi(t)$ para denotar la sustitución de todas las ocurrencias libres de v_1 por t en φ —en lugar de $\varphi(v_1 / t)$.

2. Si e es una ρ -expresión, el símbolo $\ulcorner e \urcorner$ denotará el numeral del número de secuencia de e . Así, si $g_2(e) = k$, entonces $\ulcorner e \urcorner = \bar{k} = g_2(e)$. Podríamos pensar que $\ulcorner e \urcorner$ es otro “*nombre*” para e , dentro del mismo lenguaje \mathcal{L}_ρ .

Como ejemplo, la diagonalización de α queda expresada como $\alpha(\ulcorner \alpha \urcorner)$; en particular, la β de Gödel queda como $\beta(\ulcorner \beta \urcorner)$ y la de Rosser por, $\gamma(\ulcorner \gamma \urcorner)$.

Definimos ahora una nueva función, la cual es recursiva.

36. La función $dg : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ trabaja de la siguiente manera: Si m es el número de

secuencia de una fórmula, digamos α , entonces $dg(m)$ nos dá el número de secuencia de la diagonalización de α .

Es decir si $\alpha \in \mathcal{L}_\rho^1$ y $g_2(\alpha) = m$, entonces $dg(m) = g_2(\alpha(\ulcorner \alpha \urcorner))$.

La función dg es recursiva pues,

$$dg(m) = \text{diag}(m, 1) = \text{sst}(m, 1, \text{nml}(m))$$

Con esto tenemos que la función dg es representable, en T , por una fórmula con exactamente dos variables libres, digamos por $\delta(v_1, v_2)$, con la propiedad de que cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N}$, si $dg(m) = n$, entonces

$$\mathbf{F}_1 \quad T \vdash \delta(\bar{m}, \bar{n}), \text{ y}$$

$$\mathbf{F}_2 \quad T \vdash \forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow v_2 \approx \bar{n})$$

Proposición. (*Lema Diagonal o Teorema del punto fijo*).

Para cada ρ -fórmula φ , que tenga como única variable libre a v_1 , existe un ρ -enunciado σ , tal que:

$$T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \sigma \urcorner)$$

(De modo sugerente, aunque impreciso, podríamos leer esto como:

“demostrablemente en T , el enunciado σ dice de sí misma que tiene la propiedad expresada por φ ”.)

Prueba: Sea φ una ρ -fórmula con v_1 como su única variable libre. Consideremos la fórmula,

$$\psi(v_1) \equiv \forall v_2 (\delta(v_1, v_2) \rightarrow \varphi(v_2))$$

El enunciado buscado σ , es la diagonalización de ψ . Hagámoslo explícito; sea $m = g_2(\psi)$ y así,

$$\sigma \equiv \psi(\bar{m}) \equiv \forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow \varphi(v_2))$$

Consideremos ahora a $n = g_2(\sigma)$. Así, $\bar{n} = \overline{g_2(\sigma)} = \ulcorner \sigma \urcorner$ y $dg(m) = n$. Puesto que δ representa a dg en T , por \mathbf{F}_1 , tenemos que $T \vdash \delta(\bar{m}, \bar{n})$. Con esto nos ayudamos para obtener la primera parte del resultado.

$$T \vdash \forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow \varphi(v_2)) \rightarrow \varphi(\bar{n}) \dots \dots \dots (\star)$$

Pues consideremos la siguiente deducción en T ,

1. $\forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow \varphi(v_2))$Hipótesis.
2. $\delta(\bar{m}, \bar{n}) \rightarrow \varphi(\bar{n})$ **AL₄ a 1**
3. $\delta(\bar{m}, \bar{n})$ Teorema (**F₁**)
4. $\varphi(\bar{n})$ **MP 3,2**

Por tanto, $T, \forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow \varphi(v_2)) \vdash \varphi(\bar{n})$, y utilizando el **M.T.D.** tenemos (**★**).

Veamos la otra parte. De la representabilidad de dg , en su parte **F₂**, y teniendo en cuenta que $dg(m) = n$, obtenemos que $T \vdash \forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow v_2 \approx \bar{n})$ y de esto,

$$T \vdash \varphi(\bar{n}) \rightarrow \forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow \varphi(v_2)) \dots\dots\dots (\mathbf{★★})$$

Pues considere la siguiente deducción:

1. $\forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow v_2 \approx \bar{n})$Teorema (**F₂**)
2. $\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow v_2 \approx \bar{n}$ **AL₄ a 1**
3. $\delta(\bar{m}, v_2)$Hipótesis
4. $v_2 \approx \bar{n}$M.P. **3,2**
5. $(v_2 \approx \bar{n}) \rightarrow (\varphi(\bar{n}) \rightarrow \varphi(v_2))$ Instancia del **AL₇**
6. $\varphi(\bar{n}) \rightarrow \varphi(v_2)$ M.P. **4,5**
7. $\varphi(\bar{n})$ Hipótesis.
8. $\varphi(v_2)$ M.P. **7,6**

Por tanto, tenemos: $T, \varphi(\bar{n}), \delta(\bar{m}, v_2) \vdash \varphi(v_2)$. Usando el **M.T.D.** y generalización, obtenemos: $T, \varphi(\bar{n}) \vdash \forall v_2 (\delta(\bar{m}, v_2) \rightarrow \varphi(v_2))$ y nuevamente usando el **M.T.D.**, obtenemos lo que queríamos.

Finalmente, de (**★**), (**★★**) y si tomamos en cuenta que $\bar{n} = \ulcorner \sigma \urcorner$, obtenemos: $T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \sigma \urcorner)$ lo cual queríamos demostrar. †

Aplicaciones:

En lo que sigue consideremos un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \ni \{f_s, f_+, f \cdot, c_0\} \text{ y } |\rho| \leq \aleph_0$$

Y sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ recursivamente axiomatizable en el que toda Relación (Función) Recursiva (Primitiva) es Expresable (Representable) en T .

- **Primer teorema de incompletud de Gödel (1931).**

$PRU \subseteq \mathbb{N}^2$ es recursiva y por tanto expresable en T por una fórmula con exactamente dos variables libres, digamos $\alpha_{PRU}(v_1, v_2)$. Al aplicar el Lema Diagonal a la fórmula:

$$\varphi(v_1) \equiv \forall v_0 \neg \alpha_{PRU}(v_0, v_1)$$

obtenemos que hay un ρ -enunciado γ con la propiedad,

$$T \vdash \gamma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \gamma \urcorner)$$

Así, si T es ω -consistente, entonces T tiene un indecidible, a saber γ , y por tanto T es incompleto.

Prueba: TAREA.

†

- **Teorema de Church (1936)⁽¹⁾.**

Si T es consistente, el conjunto de números de gödel (secuencia) de sus teoremas, **no** es recursivo.

Prueba: Procederemos por contrapositiva. Sea $TEO \subseteq \mathbb{N}$, definida como sigue:

$$TEO = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \exists \alpha \in FRM_\rho \left[g_2(\alpha) = m \ \& \ T \vdash \alpha \right] \right\}$$

Supongamos pues que, TEO es recursivo. Por tanto, será expresable en T por una fórmula con exactamente una variables, digamos $\tau(v_1)$. Tenemos que cualquiera sea $\alpha \in FRM_\rho$ se tiene,

R₁ Si $T \vdash \alpha$, entonces $T \vdash \tau(\ulcorner \alpha \urcorner)$. Y

R₂ Si $T \not\vdash \alpha$, entonces $T \vdash \neg \tau(\ulcorner \alpha \urcorner)$.

Consideremos la ρ -fórmula:

$$\neg \tau(v_1)$$

Por el Lema Diagonal, hay un ρ -enunciado σ , tal que:

$$T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\tau(\ulcorner\sigma\urcorner) \dots\dots\dots (*)$$

Con respecto a la demostrabilidad de σ en T , tenemos dos casos:

- i). $T \vdash \sigma \xRightarrow{\mathbf{R}_1} T \vdash \tau(\ulcorner\sigma\urcorner) \xRightarrow{(*)} T \vdash \neg\sigma$. Concluimos que T es inconsistente.
- ii). $T \nVdash \sigma \xRightarrow{\mathbf{R}_2} T \vdash \neg\tau(\ulcorner\sigma\urcorner) \xRightarrow{(*)} T \vdash \sigma$. Lo cual nos lleva al caso anterior y por tanto T sería inconsistente.

Resumiendo, si TEO es recursivo, entonces T es inconsistente. †

(1) CHURCH, ALONZO; *An unsolvable problem of elementary number theory*. The Journal of Symbolic Logic, 58; pp. 345–363, 1936.