

## Lógica Matemática III

### Teoremas de Incompletud de Gödel

#### I) ARGUMENTO DE GÖDEL.

- a) Antecedentes históricos.
- b) Heurística de problema. La Paradoja del Mentiroso y la de Richard.
- c) El Argumento.

#### II) ARITMÉTICA RECURSIVA.

- a) Primeras definiciones.
- b) Sustitución y recursión.
- c) Resultados sobre funciones recursivas.
- d) Relaciones recursivas. Función característica de una relación.
- e) Resultados sobre relaciones recursivas.

#### III) FORMALIZACIÓN DE LA ARITMÉTICA DE PEANO.

- a) Aritmética de Peano. La estructura  $\mathbb{N}$ .
- b) Un Sistema Formal para  $\mathbb{N}$  ( $AP$ ). Un Lenguaje Formal, Términos, fórmulas, un cálculo para la Aritmética, axiomas.
- c) Algunos teoremas y sus demostraciones, en  $AP$ .
- d) Divisibilidad, números primos e inducción.

#### IV) REPRESENTABILIDAD DE FUNCIONES RECURSIVAS.

- a) Expresabilidad de relaciones en  $AP$ . Relaciones expresables en  $AP$
- b) Representabilidad de funciones en  $AP$ . Funciones representables en  $AP$
- c) Representabilidad de funciones recursivas en  $AP$ .
- d) Teoremas que relacionan funciones y relaciones recursivas con la representabilidad y expresabilidad en  $AP$ , respectivamente.

#### V) ARITMETIZACIÓN DE LA METATEORÍA.

- a) Introducción. Estrategia de Gödel.
- b) Numeración de Gödel. Números de Gödel de expresiones, sucesiones de expresiones, fórmulas, pruebas, etc.
- c) Transcripción de la sintaxis de  $AP$  a la aritmética.  
Teoremas acerca de cómo transcribir algunos enunciados metateóricos a fórmulas de la aritmética recursiva.

#### VI) PRIMER TEOREMA DE INCOMPLETUD DE GÖDEL.

- a) Primer teorema de Gödel para  $AP$ .
- b) Teorema de Gödel- Rosser para  $AP$ .
- c) Condiciones para que una teoría de primer orden esté sujeta al teorema de Gödel-Rosser.
- d) Lema Diagonal.

#### VII) BOSQUEJO DEL SEGUNDO TEOREMA DE INCOMPLETUD DE GÖDEL.

Predicados de prueba. Teorema de Löb.

**BIBLIOGRAFIA BÁSICA:**

- 1 **MENDELSON, E.;** *“Introduction to Mathematical Logic”*. Se puede ver desde la Tercera Edición en Ed. Pacific Grove, Wadsworth Books, 1987, California, hasta la Sexta Edición en Ed. CRC Press, 2015.
- 2 **ENDERTON, H.;** *“A Mathematical Introduction to Logic”*, 2a. Ed. Academic Press, 2001, Boston. También en español, *“Una Introducción Matemática a la Lógica”*, 2a. Ed. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM., 2004, México.
- 3 **DE LONG, H.;** *“A profile of Mathematical Logic”*, Ed. Addison-Wesley, 1970. Reading, Mass., USA.
- 4 **PREISSER, A.;** *“Limitaciones Gödelianas de la Aritmética Formalizada”*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM, 1983. México.
- 5 **KLEENE, S.C.;** *“Mathematical Logic”*, New York: Ed. Wiley, 1967.
- 6 **NAGEL, E. & NEWMAN, J.R.;** *“Teorema de Gödel”*, Madrid: Ed. Tecnos y CONACYT.
- 7 **SMITH, P.;** *“An Introduction to Gödel’s Theorems”*. Ed. Cambridge University Press. 2007.

**BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA:**

- 8 **GÖDEL, K.;** *“On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems”*, reproducido en Van Heijenoort.
- 9 **HEIJENOORT, J. VAN, (Editor);** *“From Frege to Gödel: A source book in Mathematical Logic 1874-1931”*, Cambridge, Massachusetts: Ed. Harvard U. P., 1947.
- 10 **TORRES, C.;** *“Los teoremas de Gödel”*, México: Tesis de maestría UNAM, 1988.
- 11 **TARSKI, A.;** *“Undecidable Theories”*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1953 o reedición 1971. También en Dover, Studies in Logic and Foundation of Mathematics, 2010.
- 12 **KLEENE, S. C.;** *“Introduction to Metamathematics”*, Amsterdam: Ed. North-Holland, 1952.
- 13 **LADRIERE, J.;** *“Limitaciones internas de los formalismos”*, Madrid: Ed. Tecnos, 1969.
- 14 **KÖNER, S.;** *“Introducción a la filosofía de los Matemáticos”*, México: Ed. Siglo XXI, 1960.
- 15 **PIÑEIRO, G. E.;** *“Gödel. Los teoremas de incompletitud. La intuición tiene su lógica”*. España, Ed. National Geographic, 2012.