Tarea 1

Prof. Rafael Barbachano Aydte. Marcos Mazari

August 18, 2013

1. Considerando $SF_L =< L, R_{ii\in i} >$, sean $\Gamma, \Delta \subseteq \Phi$ y $\alpha \in \Phi$, entonces:
   (a) $\overline{\Phi} = \Phi$, donde Φ es el conjunto de fórmulas bien formadas.
   (b) Si $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Delta}$
   (c) $\overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta} \subseteq \overline{\Gamma \cup \Delta}$
   (d) $\overline{\Gamma \cap \Delta} \subseteq \overline{\Gamma} \cap \overline{\Delta}$
   (e) Γ es una teoria formal sii $\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha \in \Gamma$

2. Considerando $SF_L =< L, R_{ii\in i} >$, un sistema formal y sea $\Gamma \subseteq \Phi$, demuestre que:
   $\overline{\Gamma} = \cap \langle$T | T es teoría y $\Gamma \subseteq T\rangle$
   y con esto demostrar lo siguiente:
   Si T es una teoría y Γ es un conjunto de axiomas para T, entonces son equvalentes:
   (a) Γ es independiente para T.
   (b) $\Delta \subset \Gamma$ entonces $\overline{\Delta} \subset T$

3. Considere la siguiente estructura elemental $\Phi = \langle$R$, +, -, ., |\ .\ |\ f, \leq$, P, 0,1 $\rangle$ donde f es la funcin sucesor , P es una relación de aridad 1. Sea $\rho = \langle h_+, h_-, h_., h_{|.|}, f_f\rangle \cup \langle R\leq$, R$_P\rangle \cup \langle c_0, c_1\rangle$ un tipo de semejanza adecuado para la estructura. Para las siguientes expresiones de Lρ determine si son fórmulas, si las variables ocurren libres o acotadas, y en caso de ser ennuciados si son verdaderos o no:
   (a) $h_+(v_0, c_0)$
   (b) $\exists$ v$_0\forall$ v$_1 R_{\leq}(v_0, h_+(c_1, v_1))$

(c) $((\mathrm{P}(\mathrm{v}_1) \vee c_1 = v_0) \to (f_{\cdot}(v_3, v_4) = c_0))$

(d) $\forall v_1(\neg(c_0 = v_1) \to (\exists v_2(v_1 + v_2 = 0))$

(e) $R_{\leq}(c_0, c_1) \wedge f_{\cdot}(v_0, c_0)$

(f) $\forall v_0 \forall v_1((v_0 \leq v_1) \to \exists v_3(v_0 \leq v_3 \wedge v_3 \leq v_1))$

(g) $\forall v_0(h_+(v_0, v_1) = c_0)$

4. Sea ρ un tipo de semejanza. Demuestre que las siguientes fórmulas son universalmente verdaderas:

   (a) $\forall x \forall y \alpha(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x \alpha(x, y)$

   (b) $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge$ y=z) $\to (x = z))$

   (c) $\forall x \alpha(x) \to \exists x \alpha(x)$

   (d) $\forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \leftrightarrow (\forall x \alpha(x) \wedge \forall \beta(x)))$

   (e) $\alpha(t) \to \exists x \alpha(x)$ si t es un término libre para x en α.

   (f) $\exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \to (\exists x \alpha(x) \wedge \exists x \beta(x))$

5. Recordemos que una ocurrencia de una variable es acotada si no es libre. Sin embargo es posible dar una definición recursiva de que una variable sea acotada:
   Definición: Se dice que la ocurrencia de una variable x es acotada en α si:

   (a) α es atómica y x no ocurre en α

   (b) Si $\alpha = \beta \to \gamma$, y la ocurrencia de x en β es acotada, o la ocurrencia es en γ y es acotada.

   (c) Si $\alpha = \neg\beta$, y la ocurrencia de x en β es acotada.

   (d) Si $\alpha = \forall z \beta$, y z=x o z$\neq$x pero la ocurrencia en β es acotada.

   Demuestre que la defindión vista en clase y esta son equivalentes.

6. Dar una definición precisa de lo que significa que una variable x ocurra libre como símbolo i-ésimo en la fórmula α. (Si x es el símbolo i-ésimo de α pero no ocurre libre ahí, entonces se dice que ocurre ahí de manera acotada)

7. Sistemas Peanianos: Sea $\rho = \langle$ $c_0, s\rangle$ y sea K un conjunto de elementos no definidos. Una estructura algebráica se dice que es PEANIANA si es modelo de los siguientes axiomas:

   (a) Si s(x) = s(y) entonces x=y.

   (b) $C_0 \neq$ s(x) para cualquier x.

   (c) Si A es un subconjunto de K tal que $c_0 \in$ K y si para cualquier x $\in$ A se tiene que s(x) $\in$ A, entonces A=K

   Desmuestre que los axiomas son independentes. (1.5 pts)

8. Sea $\rho = \langle$ P $\rangle$, donde P es una letra predicativa,y supongase que se tienen los siguientes axiomas:

   (a) $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x, z)))$

   (b) $\forall x \forall y ((P(x, y)) \rightarrow (P(y, x) \rightarrow x = y))$

   (c) $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y))$

   Demuestre que dichos axiomas son indepencientes. (1.5 pts)

9. Muestre que si x no ocurre libre en α, entonces $\alpha \models \forall x \alpha$. Muestre con un ejemplo poque la hipótesis que x no ocurra libre en α es necesaria.