Tarea 2

Prof. Rafael Barbachano Aydte. Marcos Mazari

September 12, 2013

1. Sea A $\in$ Vρ y sean s, z sucesiones al universo de A tales que s(j)=z(j) para toda i$\neq$ j, entonces si v_i no ocurre libre en α, tenemos que: $\in$ Vρ y sean s, z sucesiones al universo de A tales que s(j)=z(j) para toda i$\neq$ j, entonces si v_i no ocurre libre en α, tenemos que:
   A $\models \alpha$ [s] sii A $\models \alpha$ [z]
   Recuerde hacer inducción sobre la formación de términos y luego sobre la fornación de fórmulas. (1 pt)

2. Recuerde que τ ocurre libre para x en α si al remplazar x por τ, las ocurrencias de las variables que ocurren en τ son libres en α. De una definición recursiva de "τ es libre para x en α". Y con ello (por lo tanto por inducción), muestre que si τ no es libre para x en α entonces existe una fórmula β lógicamente equivalente a α tal que τ es libre para x en β. (1 pt)

3. Pruebe en K las siguientes proposiciones (puede usar todos ls teoremas vistos en clase menos C-C) Donde ρ = P y P es una letra relacional de aridad 2: (3 pts)

   (a) $\forall$ x $\forall$ y P(x,y) $\rightarrow$ $\forall$ x P(x,x)

   (b) $\neg\ \exists$ x $\alpha \rightarrow \forall$ x $\neg\ \alpha$

   (c) $\forall$ x $\forall$ y (P(x,y) $\rightarrow$ P(y,x)) $\rightarrow \forall$ x $\neg$ P(x,x)

   (d) $\forall$ x ($\alpha \rightarrow \beta$) $\rightarrow$ ($\forall$ x $\neg\ \beta \rightarrow \forall$ x $\neg\ \alpha$)

   (e) $\forall$ x $\alpha \leftrightarrow \neg\ \exists$ x $\neg\ \alpha$

   (f) $\forall$ x $\exists$ y ($\alpha \rightarrow \beta$) $\rightarrow \forall$ x $\exists$ y ($\neg\ \alpha \vee \beta$)

   (g) $\exists$ x α (x) $\rightarrow \exists$ x(α (x) $\vee\ \beta$ (x))

(h) $\exists$ x $\exists$ y α (x,y) $\rightarrow$ $\exists$ y $\exists$ x α (x,y)

(i) $\exists$ x $\forall$ y α (x,y) $\rightarrow$ $\forall$ y $\exists$ x α (x,y)

4. Sea α una fórmula y x una varibale que no ocurre en τ, entonces:
   $\vdash \alpha$ (x/τ) $\leftrightarrow$ $\forall$ x (x=τ $\rightarrow$ α (x))
   Dar un ejemplo de una fórmula α del lenguaje $\rho =$ s,+,0 tal que α (x/τ) $\leftrightarrow$ $\forall$ x (x=τ $\rightarrow$ α (x)) no sea válido en la interpretación canónica. (1 pt)

5. Sea α una fórmula. Definimos recursivamente α':

   (a) Si α es atómica entonces $\alpha' = \neg\alpha$

   (b) Si α es *neg*β y β es atómica entonces $\alpha' = \beta$, si β no es atómica entonces $\alpha' = \neg\beta'$

   (c) Si α es $\gamma \wedge \beta$ entonces $\alpha' = \gamma' \wedge \beta'$

   (d) Si α es $\gamma \vee \beta$ entonces $\alpha' = \gamma' \vee \beta'$

   (e) Si α es $\gamma \rightarrow \beta$ entonces $\alpha' = \gamma' \rightarrow \beta'$

   (f) Si α es $\exists x\beta$ entonces $\alpha'= \forall x\beta'$

   (g) Si α es $\forall x\beta$ entonces $\alpha'= \exists x\beta'$

   Demuestre $\vdash \alpha \leftrightarrow \neg\alpha'$ y $\models \alpha \leftrightarrow \neg\alpha'$. Claramenente sin usar Correctud-Completud. (1 pt)

6. Realice lo que se le pida: (1 pt)

   (a) Demuestre $\models \alpha \rightarrow \beta$ entonces $\models \alpha$ implica $\models \beta$

   (b) Diga por qué no es cierto el regreso de: " Si $\models \alpha \rightarrow \beta$ entonces $\models \alpha$ implica $\models \beta$ "

7. Demuestre lo siguiente: (1 pt)

   (a) Una teoría T es completa sii para todo enunciado αy β, si $\vdash \alpha \vee \beta$, entonces $\vdash \alpha$ o $\vdash \beta$

(b) Sean T_1, T_2 teorías en el mismo lenguaje tales que 1) $T_1 \subseteq T_2$ 2)T_1 es completa. 3) T_2 es satisfacible. Demuestre que T$_1 = T_2$

8. Demuestre lo siguiente: (1 pt)

   (a) T es cerrada bajo constantes sii para toda α (x) con exactamente 1 variable libre, existe un término cerrado τ tal que $\vdash \exists x \alpha(x) \rightarrow \beta(\tau)$

   (b) T es cerrada bajo constantes sii para toda α (x) con exactamente 1 variable libre, tal que $\vdash \exists x \alpha(x)$, existe un término cerrado τ tal que $\vdash \alpha(x)$