Variables Libres y Acotadas

La forma cotidiana -por supuesto, en matemáticas- de usar las variables, envuelve dos maneras distintas. Veamos tres ejemplos:

I. Las integrales, en el plano real $(\mathbb{R}^2)$:

1. $\int_1^x \frac{1}{t}dt$

a. $\int_1^y \frac{1}{t}dt$ **b**. $\int_1^x \frac{1}{s}ds$

Dicen lo mismo: **1**. y **b**.
Dicen cosas distintas: **1**. y **a**.

II. Las sumatorias, en los enteros $(\mathbb{Z})$:

2. $\sum_{i=1}^{n} a_i$

c. $\sum_{j=1}^{n} a_j$ **d**. $\sum_{i=1}^{m} a_i$

Dicen lo mismo: **2**. y **c**.
Dicen cosas distintas: **2**. y **d**.

III. Los polinomios con coeficientes en los reales $(\mathbb{R})$:

3. $ax^2 + bx + c$

e. $ay^2 + by + c$ **f**. $a'x^2 + b'x + c'$

Dicen lo mismo: **3**. y **e**.
Dicen cosas distintas: **3**. y **f**.

Es claro que hay dos maneras distintas de usar una variable. Unas se llaman *Acotadas* y las otras *Libres.* Tratemos de entresacar algunas de sus propiedades:

Variable Acotada: Variable de “adeveras” o "muda"; una verdadera variable, puede tomar todos los valores -del dominio de variabilidad- pero ninguno en particular.

Variable Libre: Variable de “hule”, “aparente”, puede ser cualquier cosa -elemento del dominio de variabilidad-, pero uno solo, inamovible durante el discurso.

Variable Acotada: Si se cambia la variable, por otra, *no* cambia el significado de la expresión.

Variable Libre: Si se cambia la variable, por otra, cambia el significado de la expresión.

Son variables acotadas: En **1.**, $t.$ En **2.**, $i.$ En **3**. $x.$

Son variables libres: En **1.**, $x.$ En **2.**, $n.$ En **3.**, a, b y $c.$

Una definición formal de variable libre – o acotada – tiene que ser recursiva, debido a la forma en que se definió ρ–fórmula. Hay varias maneras de hacerlo y aquí daremos dos. Para dar la primera necesitamos la noción de subfórmula de una fórmula.

Sea ρ un tipo de semejanza y $\mathscr{L}_\rho$ un lenguaje de tipo $\rho.$

Definición Recursiva de *Subfórmulas de una fórmula.*

I] Si α es una fórmula atómica, entonces la única *Subfórmula de* α *es* ella misma, $\alpha.$

II] **1**. Sean $\alpha,\ \beta \in FRM_\rho.$

$\neg$) Las *Subfórmulas de* $(\neg\alpha)$ *son* las subfórmulas de α y ella misma, $(\neg\alpha).$

$\square$) Las *Subfórmulas de* $(\alpha\square\beta)$ *son* las subfórmulas de $\alpha,$ las subfórmulas de β y ella misma, $(\alpha\square\beta).$ Aquí hay que reemplazar el metasímbolo $\square$ por todos y cada uno de los conectivos: $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

2. Sean $\alpha \in FRM_\rho$ y $n \in \mathbb{N}.$

a) Las *Subfórmulas de* $\left(\forall v_n\ \alpha\right)$ *son* las subfórmulas de α y ella misma.

b) Las *Subfórmulas de* $\left(\exists v_n\ \alpha\right)$ *son* las subfórmulas de α y ella misma.

Con esta noción, podemos pasar a dar la definición formal de variable libre y acotada. Puesto que una variable puede ocurrir varias veces en una fórmula, la definición se hará para cada una de las ocurrencias.

Definición. Sean $x \in VAR$ y $\beta \in FRM_\rho.$ *Una ocurrencia de* x *en* $\beta,$ es *Acotada en* β syss hay una subfórmula de β de la forma $(\forall x\alpha)$ o de la forma $(\exists x\alpha)$ y dicha ocurrencia es la variable del cuantificador o x ocurre en $\alpha.$

Dicho de manera coloquial, una ocurrencia de la variable x en $\beta,$ es acotada en β syss dicha ocurrencia de $x,$ es la variable de un cuantificador que aparece en $\beta,$ o está en el alcance de algún cuantificador "$\forall x$" o "$\exists x$" perteneciente a una subfórmula de $\beta.$ Pasemos a dar la otra parte.

Definición. Sean $\beta \in FRM_\rho$ y $x \in VAR_\rho.$ *Una ocurrencia de* x *en* β *es Libre, en* β syss dicha ocurrencia **no** es acotada en $\beta.$ Y decimos que x *Ocurre Libre en* β syss x tiene una ocurrencia libre en $\beta.$

Ejemplos: Sea $\rho = \{P\} \cup \{f\} \cup \{c\}$, donde $P \in \mathcal{P}_2$, $f \in \mathcal{F}_1$ y $c \in \mathcal{C}$. Y Consideremos las siguientes ρ–fórmulas:

1. $P(x,y)$

2. $\exists z P(x,y)$

3. $\forall x P(x,y)$

4. $\exists x P(x,y) \rightarrow f(x) \approx c$

5. $\forall x \Big(P(x,y) \rightarrow \forall y P\big(f(x), y \big) \Big)$

En **1**. y en **2**. las únicas ocurencias de x y de y son líbres y la única ocurrencia de z, es acotada en **2**. En **3**., todas las ocurencias de x son acotadas y la única de y es libre. En **4**., las primeras dos ocurencias de x son acotadas y la última es libre; la única de y es libre. En **5**., todas las ocurencias de x (a saber 3) son acotadas, la primera de y es libre y las otras dos, son acotadas.

Pasemos ahora a dar una segunda manera de definir formalmente estas nociones; también tiene que ser recursiva y la daremos para el conjunto de ocurrencias libres de una fórmula. Esta tiene un defecto y haremos los comentarios pertinentes posteriormente a la definición.

Definición Recursiva del *Conjunto de Variables Libres de una Fórmula.*

I] Si α es ρ–atómica, entonces la variable x *Ocurre Libre en* α syss x ocurre en α.

II] **1**). Sean $\alpha,\ \beta \in FRM_\rho$.

$\neg$) La variable x *Ocurre Libre en* $(\neg\beta)$ syss x ocurre libre en β.

$\Box$) La variable x *Ocurre Libre en* $(\beta\Box\gamma)$ syss x ocurre libre en β u ocurre libre en γ.

Aquí hay que reemplazar el metasímbolo $\Box$ por todos y cada uno de los conectivos: $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

2). Sean $\beta \in FRM_\rho$ y $x,\ y \in VAR$.

a) La variable x *Ocurre Libre en* $(\forall y\beta)$ syss x ocurre libre en β y $x \neq y$.

b) La variable x *Ocurre Libre en* $(\exists y\beta)$ syss x ocurre libre en β y $x \neq y$.

Obsérvese que lo que definimos es que "una variable ocurra libre en una fórmula", pero no hemos dicho en que lugar ocurra. Por lo que una variable puede ocurrir libre y sin embargo tener ocurrencias que no son libres en la misma fórmula; p. e. vea **5**. Así, no es posible, de aquí, dar una definición de variable acotada.

Sin embargo, si podemos dar una definición de uno de los conceptos más importantes que necesitaremos.

Definición. Sea $\sigma \in FRM_\rho$. Diremos que σ es un *Enunciado de Tipo* ρ, en breve, ρ–*Enunciado* syss todas las ocurrencias de sus variables no son libres.

Notación: $\mathcal{L}_\rho^n = \left\{\varphi \in \Phi_\rho \;/\;\text{ en } \varphi \text{ aparecen a lo más } n \text{ variables libres}\right\}$

Así, $\mathcal{L}_\rho^0 = \left\{\sigma \in FRM_\rho \;/\; \sigma \text{ es un } \rho\text{–enunciado}\right\}$.