Satisfacibilidad y Verdad

Antes de pasar a dar una definición rigurosa de cómo interpretar una fórmula necesitamos un poco de,

Notación y Convenciones:

1. Sean, $s \in {}^{\omega}A$, $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Por $s(v_n/a)$ entenderemos a la "nueva" A–asignación que se obtiene a partir de s al quitar el valor s_n y poner en su lugar el valor a y dejar todo lo demás igual. En símbolos:

$$s(v_n/a) : VAR \to A$$

$$\forall i \in \mathbb{N},\ s(v_n/a)(v_i) = \begin{cases} a & \text{si } i = n \\ s_i & \text{si } i \neq n \end{cases}$$

También lo podemos pensar así: $s(v_n/a) = \langle s_0, s_1, \ldots, a, s_{n+1}, \ldots \rangle$.

2. La notación anterior se generaliza en forma natural para: $s(v_{n_1}/a_1, \ldots, v_{n_m}/a_m) \in {}^{\omega}A$, donde $s \in {}^{\omega}A$, $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ (distintos dos a dos) $m \in \mathbb{Z}^+$ y $a_1, \ldots, a_m \in A$.

3. Cuando usemos metavariables sobre VAR, digamos x, y, z, la A–asignación $s(x/a, y/b, y/c)$ quedará clara en el contexto.

Definición Recursiva de *Satisfacibilidad (TARSKI, 1936)*, $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$:

La ρ–fórmula α se Satisface en la ρ–estructura $\mathfrak{A}$, bajo la A–asignación s, o, *La ρ–estructura $\mathfrak{A}$ Satisface la ρ–fórmula α en (o bajo) la A–asignación s* :

I) (Atómicas)

Si $P \in P_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ son ρ–términos, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\tau_1 \approx \tau_2)[s] \quad \text{syss} \quad \tau_1^{\mathfrak{A}}[s] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[s]$$

$$\mathfrak{A} \models P(\tau_1, \ldots, \tau_n)[s] \quad \text{syss} \quad \langle \tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s] \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$$

II) a) Si α y β son ρ–fórmulas, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\neg\alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \,\&\, \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models \alpha[s] \ \text{ y } \ \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \vee \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models \alpha[s] \ \text{ o } \ \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \to \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \not\models \alpha[s] \ \text{ o } \ \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models (\alpha \to \beta)[s] \text{ y } \mathfrak{A} \models (\beta \to \alpha)[s]$$

b) Si α es una *ρ–fórmula y* $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\forall v_n \alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \text{para todo } a \in A, \mathfrak{A} \models \alpha[s(v_n/a)]$$
$$\mathfrak{A} \models (\exists v_n \alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \text{para algún } a \in A, \mathfrak{A} \models \alpha[s(v_n/a)]$$

Ejemplos: …

Definición. Una ρ–fórmula α es *Verdadera* en una ρ–estructura $\mathfrak{A}$, o también, que $\mathfrak{A}$ es *Modelo* de α syss α se satisface en $\mathfrak{A}$ bajo cualquier A–asignación s. En símbolos,

$$\mathfrak{A} \models \alpha \quad \text{syss} \quad \text{para toda } A\text{–asignación } s, \mathfrak{A} \models \alpha[s]$$

Definición. Una ρ–fórmula α es *Falsa* en una ρ–estructura $\mathfrak{A}$ syss α no se satisface en $\mathfrak{A}$ bajo ninguna A–asignación s. En símbolos,

$$\alpha \text{ es } \textit{Falsa en } \mathfrak{A} \quad \text{syss} \quad \text{para toda } A\text{–asignación } s, \mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$$

Definición. Una ρ–fórmula α es *Universalmente Verdadera* syss α es Verdadera en toda ρ–estructura $\mathfrak{A}$. En símbolos,

$$\models \alpha \quad \text{syss} \quad \text{para toda } \rho\text{–estructura } \mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \models \alpha$$

Definición. Una ρ–fórmula α es *Universalmente Falsa* syss α es Falsa en toda ρ–estructura $\mathfrak{A}$. En símbolos:

$$\alpha \text{ es } \textit{Universalmente Falsa} \quad \text{syss} \quad \text{para toda } \rho\text{–estructura } \mathfrak{A},\ \alpha \text{ es Falsa}$$

Notación:

$$\mathcal{UV}_\rho = \left\{\alpha \ / \ \alpha \text{ es una } \rho\text{–fórmula universalmente verdadera}\right\}$$
$$\mathcal{UF}_\rho = \left\{\alpha \ / \ \alpha \text{ es una } \rho\text{–fórmula universalmente falsa}\right\}$$

Definicion. Sea $\alpha \in FRM_\rho$. Decimos que α es *Contingente* syss $\alpha \notin \mathcal{UV}_\rho$ y $\alpha \notin \mathcal{UF}_\rho$.

Ejemplos: ...

Proposición. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho,\ \alpha, \beta \in FRM_\rho$. Así:

I. **a**). α es falsa en $\mathfrak{A}$ syss $\mathfrak{A} \models \neg\alpha.$

b). $\alpha \in \mathcal{UF}_\rho$ syss $\neg\alpha \in \mathcal{UV}_\rho$

c). $\mathfrak{A} \models \alpha$ syss $\neg\alpha$ es falsa en $\mathfrak{A}$.

d). $\alpha \in \mathcal{UV}_\rho$ syss $\neg\alpha \in \mathcal{UF}_\rho$

e). α es contingente syss $\neg\alpha$ es contingente

II). No es el caso que ambas se den: $\mathfrak{A} \models \alpha$ y $\mathfrak{A} \models \neg\alpha.$ Es decir, ninguna fórmula es verdadera y falsa en una ρ–interpretación.

III). $\mathfrak{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)$ y $\mathfrak{A} \models \alpha,$ entonces $\mathfrak{A} \models \beta.$

IV). $(\alpha \rightarrow \beta)$ es falsa en $\mathfrak{A}$ syss $\mathfrak{A} \models \alpha$ y $\mathfrak{A} \models \neg\beta.$

V). $\mathfrak{A} \models \alpha$ syss $\mathfrak{A} \models \forall x\alpha.$
Esto se puede generalizar de la siguiente manera: Por la *Clausura* de $\alpha,$ denotado por $\bar{\alpha},$ entenderemos por la fórmula, cerrada o enunciado, que se obtiene de $\alpha,$ al anteponerle a ella todos los cuantificadores universales de las variables -en orden creciente- que ocurren libres en ella. Así, $\mathfrak{A} \models \alpha$ syss $\mathfrak{A} \models \bar{\alpha}.$

Prueba: **TAREA**. †

En forma similar a lo que nos ocurrio con los términos; al interpretar una fórmula específica, en una estructura y en una asignación determinada, lo que nos interesa son los valores que toman las variables líbres que aparecen en dicha fórmula y no así los valores que la asignación les dá a las variables acotadas y mucho menos a las que no aparecen. Esto hecho lo capturamos en la siguiente,

Proposición. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $s,\ s' \in {}^{\omega}A.$ Así,
Para toda ρ–fórmula α se tiene que, si s y s' coinciden en todas las variables que ocurren libres en $\alpha,$ entonces

$$\mathfrak{A} \models \alpha\,[s] \text{ syss } \mathfrak{A} \models \alpha\,[s']$$

Prueba: **TAREA** (Sug. usar inducción sobre la formación de fórmulas). †

Proposición. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ syss hay } s \in {}^{\omega}A \text{ tal que } \mathfrak{A} \models \sigma\,[s]$$

Prueba:

$\Rightarrow]$ Sabemos que, $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$ con $A \neq \emptyset.$ Sea pues $a \in A$ y sea $s_a \in {}^{\omega}A$ la constante $a,$ es decir, para todo $n \in \mathbb{N},\ s_a(v_n) = a.$ Ahora, como $\mathfrak{A} \models \sigma,$ en particular $\mathfrak{A} \models \sigma[s_a].$

$\Leftarrow]$ Supongamos que $s \in {}^{\omega}A$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma[s].$ Como $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho,$ sus variables no tienen ocurrencias libres y, por el resultado anterior, para cualquier otra $s' \in {}^{\omega}A$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \sigma[s']$, es decir $\mathfrak{A} \models \sigma$. †

Corolario. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$. Así,

1. $\mathfrak{A} \models \sigma$ o σ es falso en $\mathfrak{A}$ (y, por **II**, no ambos).

2. $\mathfrak{A}$ es modelo de σ o $\mathfrak{A}$ es modelo de $\neg\sigma$.