

Consecuencia Lógica y Satisfacibilidad.

Ahora generalizaremos la noción de implicación lógica para un mayor número de hipótesis.

Definición₃. Sea $\Gamma \cup \{\beta\} \subseteq FORM_\rho$.

$\Gamma \models \beta$ syss para cada $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y cada $s \in {}^\omega A$,
si para toda $\alpha \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \models \alpha [s]$ entonces $\mathfrak{A} \models \beta [s]$

En tal caso, diremos que β es *Consecuencia (Lógica)* del conjunto Γ .

Observaciones: Sea $\Gamma \cup \Sigma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq FORM_\rho$. Así,

1. $\Sigma \not\models \beta$ syss hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y una $s \in {}^\omega A$, tales que $\mathfrak{A} \models \alpha [s]$ para todo $\alpha \in \Sigma$ pero $\mathfrak{A} \not\models \beta [s]$ o equivalentemente, $\mathfrak{A} \models \neg\beta [s]$
2. $\emptyset \models \beta$ syss $\models \beta$ (es decir, $\emptyset \models \beta$ syss $\beta \in \mathcal{UV}_\rho$)
3. $\{\alpha\} \models \beta$ syss $\alpha \models \beta$.

Notación: Sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta\} \subseteq FORM_\rho$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$$

4. $\beta, \neg\beta \models \gamma$, cualquiera sea $\gamma \in FORM_\rho$.
5. $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$.
6. $\alpha \& \beta \models \alpha$ y $\alpha \& \beta \models \beta$.
7. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in FORM_\rho$. Así,
 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ syss $\alpha_1 \& \dots \& \alpha_n \models \beta$
8. Si $\alpha \in \Sigma$, entonces $\Sigma \models \alpha$.
9. Si $\Gamma \supseteq \Sigma$ y $\Sigma \models \alpha$, entonces $\Gamma \models \alpha$.
10. Si $\models \beta$, entonces $\Delta \models \beta$, cualquiera sea $\Delta \subseteq FORM_\rho$.
11. Si para todo $\alpha \in \Sigma$, $\Gamma \models \alpha$ y $\Sigma \models \beta$ entonces $\Gamma \models \beta$.

Como hemos visto el conjunto de fórmulas está partido en las universalmente verdaderas, las universalmente falsas y las contingentes. Hay un tipo especial de fórmulas que nos interesa estudiar y son las que son verdaderas "puntualmente".

Definición₄. Sea $\alpha \in FORM_\rho$. α es *Satisfacible* syss

hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y una $s \in {}^\omega A$ tal que $\mathfrak{A} \models \alpha [s]$.

Observación: Sea $\alpha \in FORM_\rho$.

α no es satisfacible syss para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y toda $s \in {}^\omega A$ se tiene que, $\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$.

Proposición₆.

1. α no es satisfacible syss $\alpha \in \mathcal{UF}$ syss $\neg\alpha \in \mathcal{UN}$
2. α es satisfacible syss $\alpha \notin \mathcal{UF}$ syss $\neg\alpha \notin \mathcal{UN}$
3. $\neg\alpha$ no es satisfacible syss $\neg\alpha \in \mathcal{UF}$ syss $\alpha \in \mathcal{UN}$
4. $\neg\alpha$ es satisfacible syss $\alpha \notin \mathcal{UN}$ syss $\neg\alpha \notin \mathcal{UF}$

Generalizamos la noción de satisfacibilidad de una fórmula para un conjunto de ellas.

Definición₅. Sea $\Sigma \subseteq FORM_\rho$. Diremos que Σ es *Satisfacible* syss

hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y una $s \in {}^\omega A$ tal que para toda $\alpha \in \Sigma$, se tiene $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$.

Nos interesa el siguiente caso particular.

Definición₆. Una ρ -interpretación \mathfrak{A} es *Modelo* de un conjunto Σ de ρ -fórmulas syss \mathfrak{A} hace verdaderas a todas las fórmulas de Σ . En símbolos:

$$\mathfrak{A} \models \Sigma \quad \text{syss} \quad \text{para toda } \alpha \in \Sigma, \mathfrak{A} \models \alpha$$

Observación: Para el caso en que $\Sigma = \{\alpha\}$, tenemos,

$$\mathfrak{A} \models \{\alpha\} \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models \alpha$$

Veamos algunas propiedades para enunciados.

Proposición₇. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$. Así,

1. $\mathfrak{A} \models \sigma$ syss hay $s \in {}^\omega A$, tal que $\mathfrak{A} \models \sigma[s]$.
2. σ es satisfacible syss σ tiene un modelo.
3. Σ es satisfacible syss Σ tiene un modelo.
4. Σ **no** es satisfacible syss si en cada ρ -interpretación al menos un enunciado de Σ es falso.
5. $\Sigma \models \sigma$ syss todo modelo de Σ , es un modelo de σ .
6. $\Sigma \not\models \sigma$ syss hay un modelo de Σ en el cual σ es falso.

Proposición₈. Sea $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$. Así,

1. $\Sigma \models \sigma$ syss $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ no es satisfacible. O, equivalentemente,

2. $\Sigma \not\models \sigma$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ tiene un modelo

Prueba: Veamos 2. Pero, esta es inmediata de la propiedad 6 anterior y del hecho de que un enunciado falso en una estructura es equivalente a que su negación sea verdadera en dicha estructura. †

Proposición₉. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$. Así,

1. Σ tiene un modelo si y sólo si hay un $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$ tal, que $\Sigma \not\models \sigma$. O equivalentemente,

2. Σ no es satisfacible o no tiene modelo si y sólo si para todo $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$, $\Sigma \models \sigma$.

Prueba: Si Σ tiene un modelo, entonces ninguna contradicción es consecuencia lógica de él -p.e. $\neg(v_0 \approx v_0)$. Otro ejemplo, si $\alpha \in \Sigma$, se tiene que $\Sigma \not\models \neg\alpha$ (aquí se necesita que $\Sigma \neq \emptyset$). El "regreso" es inmediato de la definición de \models . †

Proposición₁₀. (Metateorema -Semántico- de la Deducción). Sea $\Sigma \cup \{\sigma, \delta\} \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$. Así,

1. Si $\Sigma \models \sigma \rightarrow \delta$, entonces $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \delta$.

2. Si $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \delta$, entonces $\Sigma \models \sigma \rightarrow \delta$.

Prueba: 1 es inmediato. Veamos 2.

Supongamos pues que, $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \delta$. Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}_\rho$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, veamos que $\mathfrak{A} \models \sigma \rightarrow \delta$. Tenemos dos casos: Si σ es falsa en \mathfrak{A} , entonces $(\sigma \rightarrow \delta)$ es verdadera en \mathfrak{A} . Si σ es verdadera en \mathfrak{A} , entonces \mathfrak{A} satisface $\Sigma \cup \{\sigma\}$ y por nuestra suposición, δ será verdadera en \mathfrak{A} , con lo que también el enunciado $(\sigma \rightarrow \delta)$. En ambos casos, tenemos lo que queríamos. †