Ideas para la prueba del **MTC**:

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\rho}^{0}$.

Recordar (**definiciones**):

1. Diremos que Σ es *Finitamente Satisfacible* syss todo subconjunto finito de Σ es satisfacible, o equivalentemente, todo subconjunto finito de Σ tiene un modelo.

2. $\Sigma^{\models_f} = \left\{\sigma \in \mathcal{L}_{\rho}^{0} \ / \ \Sigma \models_f \sigma\right\}$.

3. Σ es una *f–Teoría* syss $\Sigma = \Sigma^{\models_f}$.

4. Σ es *f–Completa* syss cqsea $\sigma \in \mathcal{L}_{\rho}^{0}$, se tiene que $\Sigma \models_f \sigma$ o que $\Sigma \models_f \neg\sigma$.

Lema$_1$. Si Σ es finitamente satisfacible, entonces hay un Γ tal que

- i) $\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{L}_{\rho}^{0}$.
- ii) Γ es finitamente satisfacible.
- iii) Γ es *f*–completa.
- iv) Γ es *f*–teoría.

Prueba: Zornificar. †

Definición:

1) Sean $\alpha(v_i) \in \mathcal{L}_{\rho}^{1}$ y $c \in \mathcal{C}_{\rho}$. $\alpha(v_i/c)$ es *un Testigo* de $\exists v_i\alpha$.
2) $\Delta \subseteq \mathcal{L}_{\rho}^{0}$. Δ es *Cerrado Bajo Testigos* syss para cada $\exists v_i\alpha \in \Delta$ hay una $c \in \mathcal{C}_{\rho}$ tal que $\alpha(v_i/c) \in \Delta$.

Lema$_2$. $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\rho}^{0}$. Si Σ es finitamente satisfacible, entonces hay un Δ tal que

- i) $\Sigma \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{L}_{\rho'}^{0}$, con $\rho' \supseteq \rho$.
- ii) Δ es finitamente satisfacible.
- iii) Δ es cerrado bajo testigos.

Debido a este resultado, se necesita ver el tema de Extensión del Lenguaje y por ende la Expansión de Estructuras.

Definición. $T \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. T es una *Teoría de Henkin* syss T es una f–teoría, finítamente satisfacible, f–completa y cerrada bajo testigos.

Lema$_3$. Todo conjunto de ρ–enunciados finítamente satisfacible, se puede extender a una Teoría de Henkin.
Prueba: Usar repetidamente y alternando el **Lema**$_1$ con el **Lema**$_2$. †

Lema$_4$. Toda Teoría de Henkin tiene modelo.
Prueba: Usar como universo del model a los términos, módulo una relación de equivalencia adecuada, para que trabaje correctamente la igualdad (modelo dado por Gödel). †

METATEOREMA DE COMPACIDAD.

Todo conjunto de ρ–enunciados finítamente satisfacible es satisfacible.

Prueba. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ finítamente satisfacible. Por el **Lema**$_3$, Σ se puede extender a una ρ'–teoría de Henkin, digamos T. Así, tenemos que $\Sigma \subseteq T \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$ con $\rho \subseteq \rho'$. Ahora bien, por el **Lema**$_4$, T tiene un ρ'–modelo, digamos $\mathfrak{A}$, y por tanto de Σ. Finalmente , la restricción de $\mathfrak{A}$ a ρ, es decir $\mathfrak{A} \upharpoonright \rho$, es un ρ–modelo de Σ y por tanto Σ es satisfacible. †