METATEOREMA DE COMPACIDAD

Pasemos ahora a la prueba del Metateorema de Compacidad. Antes necesitamos unos resultados:

Lema$_1$. $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Si Σ es finitamente satisfacible, entonces hay un Γ tal que

i). $\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$.

ii). Γ es finitamente satisfacible.

iii). Γ es f–completa.

iv). Γ es f–teoría.

Daremos dos pruebas.

1a. **Prueba**. Supongamos que $|\rho| \leq \aleph_0$. Una prueba general, es decir que el cardinal de ρ fuera arbitrario, necesitaría técnicas que no tenemos a la mano (a saber el Esquema General de Recusión para Ordinales). Tenemos pues que, $|\mathcal{L}_\rho| = \aleph_0$, $|EXP_\rho| = \aleph_0$, $|FRM_\rho| = \aleph_0$ y $|\mathcal{L}^0_\rho| = \aleph_0$. Sea $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de todos los ρ–enunciados. Definimos recursivamente la familia $\left\{\Gamma_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$ como sigue:

I) $\Gamma_0 = \Sigma$.

II) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\sigma_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\sigma_n\} \text{ es finitamente satisfacible} \\ \text{o} & \\ \Gamma_n \cup \{\neg\sigma_n\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$.

Observación. La colección $\left\{\Gamma_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$ forma una $\subseteq$–cadena, es decir:

$$\dot{\forall}\ n,m \in \mathbb{N}, \text{ Si } n < m, \text{ entonces } \quad \Gamma_n \subseteq \Gamma_m.$$

Afirmamos que Γ cumple con lo requerido:

i). $\Sigma = \Gamma_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \Gamma$ y como $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ tenemos que $\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$.

ii). Gracias a la **Proposición$_{12}$**, basta probar que $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma_n$ es finitamente satisfacible. Y esto lo haremos por Inducción:

a). Γ_0 es finitamente satisfacible; pues $\Gamma_0 = \Sigma$.

b). Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y supongamos inductivamente que Γ_n es finitamente satisfacible; veamos que Γ_{n+1} también lo es. Consideremos ahora a $\Gamma_n \cup \{\sigma_n\}$. Si éste es finitamente satisfacible, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\sigma_n\}$ y Γ_{n+1} es finitamente satisfacible. En cambio si no lo es, entonces, por la **Proposición$_{11}$**, $\Gamma_n \cup \{\neg\sigma_n\} = \Gamma_{n+1}$

es finitamente satisfacible.

iii). y **iv**). Para probar que Γ es una f–teoría f–completa, en virtud de la **Proposición$_{10.3}$** y de **ii**)., es suficiente con probar que si $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, entonces $\sigma \in \Gamma$ o $\neg\sigma \in \Gamma$. Como $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho = \{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_{n_0} = \sigma$. De la definición de Γ_{n_0+1}, tenemos que $\sigma_{n_0} \in \Gamma_{n_0+1}$ o $\neg\sigma_{n_0} \in \Gamma_{n_0+1}$ en cualquier caso tenemos que $\sigma_{n_0} \in \Gamma$ o $\neg\sigma_{n_0} \in \Gamma$. †

Otra prueba del **Lema$_1$**, ahora no importará la cardinalidad del lenguaje, es usando una versión del Axioma de Elección, a saber el Lema de Zorn (**LZ**).

2a. **Prueba**: Sea

$$A = \left\{\Delta \subseteq \mathcal{L}^0_\rho \ / \ \Delta \supseteq \Sigma \text{ y } \Delta \text{ es finitamente satisfacible}\right\}$$

Así, $\langle A, \ \subseteq\rangle \in COPO.$ Veamos que se cumplen las hipótesis del Lema de Zorn, es decir que toda cadena de A está acotada superiormente. Pero esto es inmediato de la **Proposición$_{12}$** (la unión de la cadena es la cota superior buscada). Así, por el **LZ**, $\langle A,\subseteq\rangle$ tiene un elemento $\subseteq$–maximal, digamos Γ. Este tiene las propiedades siguientes:

a). $\Gamma \in A$. Es decir $\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ y Γ es finitamente satisfacible. Y

b). Si $\Delta \in A$ y es tal que $\Delta \supseteq \Gamma$, entonces $\Delta = \Gamma$.

Veamos que Γ es el buscado. Γ cumple con **i**). y **ii**). gracias al **a**). Para ver que cumple con **iii**). y **iv**). basta, por la **Proposición$_{10.3}$**, ver que

$$\forall\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \left[\sigma \in \Gamma \text{ o } \neg\sigma \in \Gamma\right]$$

Sea pues, $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$. Puesto que Γ es finitamente satisfacible, por la **Proposición$_{11}$**, sabemos que $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\sigma\}$ es finitamente satisfacible o $\Gamma_2 = \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ es finitamente satisfacible. Puesto que ambos conjuntos extienden a Γ, por **b**)., tenemos que $\Gamma_1 = \Gamma$ o que $\Gamma_2 = \Gamma$, en cada caso tenemos que $\sigma \in \Gamma$ o $\neg\sigma \in \Gamma$. †