Extensión del Lenguaje Formal
Y
Expansión de Estructuras

En lo que sigue, sean ρ y ρ' tipos de semejanza y consideraremos, por ende, sus lenguajes (formales de primer orden) $\mathcal{L}_\rho$ y $\mathcal{L}_{\rho'}$ respectivamente.

Definición₁. $\mathcal{L}_{\rho'}$ es *la* ρ'*–Extensión* de $\mathcal{L}_\rho$, o $\mathcal{L}_\rho$ es *la* ρ*–Contracción de* $\mathcal{L}_{\rho'}$ syss

$$\rho \subseteq \rho'$$

Observaciones. Si $\rho \subseteq \rho'$, entonces

a). $\mathcal{L}_\rho \subseteq \mathcal{L}_{\rho'}$,

b). $EXP_\rho \subseteq EXP_{\rho'}$,

c). $FRM_\rho \subseteq FRM_{\rho'}$,

d). $\mathcal{L}^0_\rho \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$.

e). Si previamente están fijados los tipos, tanto las contracciones como las extensiones, son únicas.

Notación:

1. Si $E \subseteq EXP_\rho$,

$$\begin{aligned}\rho(E) &= \{s \in \rho \ / \ \text{hay una } \rho-\text{expresión } e \in E, \text{ tal que en } e \text{ aparece } s\} \\ &= \{\text{símbolos } \textit{no-lógicos} \text{ que aparecen en alguna } \rho-\text{expresión de } E\}\end{aligned}$$

2. Si $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $||\mathfrak{A}||$ denotará el universo de la ρ–estructura $\mathfrak{A}$. O cuando no se preste a confusión, como siempre, usaremos la letra mayúscula: A.

Definición₂. Supongamos que $\rho \subseteq \rho'$ y $\mathfrak{B} \in V_{\rho'}$.
La estructura $\mathfrak{A}$ es *El Reducto de* $\mathfrak{B}$ *a* ρ, syss

1. $\mathfrak{A} \in V_\rho$,

2. $||\mathfrak{A}|| = ||\mathfrak{B}||$ (o bien, $A = B$) y

3. Para todo $s \in \rho$, $s^{\mathfrak{A}} = s^{\mathfrak{B}}$.

Notación: Si $\mathfrak{A}$ es el reducto de $\mathfrak{B}$ *a* ρ, lo denotaremos por $\mathfrak{B} \upharpoonright \rho$.

Ejemplos: …

Definición$_3$. Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Diremos que $\mathfrak{B}$ es *una ρ'–Expansión de* $\mathfrak{A}$ syss

1. $\rho' \supseteq \rho$,

2. $\mathfrak{B} \in V_{\rho'}$ y

3. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \restriction \rho$.

Notación: $\mathfrak{B} = \left\langle \mathfrak{A}, \left\{ s^{\mathfrak{B}} \ / \ s \in \rho' \setminus \rho \right\} \right\rangle$.

Ejemplos: …

Observaciones:

1. Los reductos son únicos.
2. Si $\rho \subseteq \rho'$ y $\mathfrak{A} \in V_\rho$, siempre hay una ρ'–expansión de $\mathfrak{A}$.

Pues, sean $a_0 \in \|\mathfrak{A}\| = A$ y

$$\mathfrak{B} = \left\langle \mathfrak{A}, \left\{ s^{\mathfrak{B}} \ / \ s \in \rho' \setminus \rho \right\} \right\rangle$$

donde:

a. Si $s \in \mathcal{P}^n_{\rho' \setminus \rho}$, entonces $s^{\mathfrak{B}} = \left\{ \left\langle a_0, a_0, \ldots, a_0 \right\rangle \right\} \subseteq A^n$

b. Si $s \in \mathcal{F}^n_{\rho' \setminus \rho}$, entonces $s^{\mathfrak{B}} : A^n \to A$ tal que, para todo $x \in A$, $s^{\mathfrak{B}}(x) = a_0$ y

c. Si $s \in \mathcal{C}_{\rho' \setminus \rho}$, entonces $s^{\mathfrak{B}} = a_0$.

3. Hay muchas maneras de expandir una estructura.

Proposición. Sean $\rho \subseteq \rho'$, $\mathfrak{B} \in V_{\rho'}$ y $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \restriction \rho$. Así,

I. Para todo $\tau \in TRM_\rho$ y toda $s \in {}^{\omega}A$,

$$\tau^{\mathfrak{A}}[s] = \tau^{\mathfrak{B}}[s]$$

II. Para toda $\alpha \in FRM_\rho$ y toda $s \in {}^{\omega}A$,

$$\mathfrak{A} \models \alpha[s] \text{ syss } \mathfrak{B} \models \alpha[s]$$

III. Para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, se tiene que,

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ syss } \mathfrak{B} \models \sigma$$

Prueba: **TAREA**.

Sug. Las pruebas de **I** y **II** son directas, usando los principios de inducción sobre la formación de términos y de fórmulas, respectivamente. Y **III** es inmediata de **II**. †

Este resultado nos dice que la verdad de los enunciados depende *únicamente* de los símbolos no–lógicos que aparecen en él.

El siguiente resultado lo vamos a necesitar más adelante.

Proposición *(Metateorema de Sustitución).*
Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $s \in {}^{\omega}A$ y $x \in VAR$. Así,

1. Sea $\tau \in TRM_\rho$. Para todo $\theta \in TRM_\rho$, en el cual x puede ocurrir o no, se tiene que

$$\theta\left(x / \tau\right)^{\mathfrak{A}}[s] = \theta^{\mathfrak{A}}\left[s\left(x / \tau^{\mathfrak{A}}[s]\right)\right]$$

2. Para cualquier $\alpha \in FRM_\rho$, en la cual x puede ocurrir libre, se tiene que si $\tau \in TRM_\rho$, el cual es libre para x en α, entonces

$$\mathfrak{A} \models \alpha\left(x / \tau\right)[s] \text{ syss } \mathfrak{A} \models \alpha\left[s\left(x / \tau^{\mathfrak{A}}[s]\right)\right]$$

TAREA:

a). Pruebe el resultado anterior. **Sug**. utilizar inducción sobre la formación de dichas expresiones.

b). Enuncie el caso particular en el que la única variable libre puede ser x (y por tanto no se necesita toda la asignación s) y el término es una constante.