Antes de pasar al siguiente resultado, necesitamos la siguiente,

Definición$_1$.

1) Sean $\alpha \in FRM_\rho$ y $c \in \mathcal{C}_\rho$. Decimos que $\alpha\left(x / c\right)$ es *un Testigo* de $\exists x\alpha$.
2) $\Delta \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Diremos que Δ es *Cerrado Bajo Testigos* syss para cada $\exists x\alpha(x) \in \Delta$, hay una $c \in \mathcal{C}_\rho$ tal, que $\alpha\left(x / c\right) \in \Delta$.

Definición$_2$. Para cada conjunto de ρ–enunciados $\Sigma,$ construimos otro conjunto $\Sigma^*,$ como sigue:

Por cada enunciado de $\Sigma,$ agregamos al lenguaje original constantes nuevas y distintas; es decir, si $\sigma \in \Sigma,$ sea c_σ una constante tal, que $c_\sigma \notin \rho$ y si $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ con $\sigma_1 \neq \sigma_2$ entonces $c_{\sigma_1} \neq c_{\sigma_2}$. Consideremos ahora la extensión de nuestro lenguaje,

$$\rho^* = \rho(\Sigma) \cup \left\{c_\sigma \ / \ \sigma \in \Sigma\right\}$$

Ahora, para cada $\sigma \in \Sigma$ definimos un $\sigma^* \in \mathcal{L}^0_{\rho^*}$, como sigue :

$$\sigma^* = \begin{cases} \alpha\left(x / c_\sigma\right) & \text{si} \quad \sigma \rightleftharpoons \exists x\alpha(x) \\ \text{o} & \\ \sigma & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente, sea

$$\Sigma^* = \Sigma \cup \left\{\sigma^* \ / \ \sigma \in \Sigma \text{ y } \sigma^* \neq \sigma\right\}$$

OjO:

1. $\rho(\Sigma^*) = \rho(\Sigma) \cup \left\{c_\sigma \ / \ \sigma \in \Sigma \text{ y } \sigma^* \neq \sigma\right\} \subseteq \rho^*.$

2. $\Sigma \subseteq \Sigma^* \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho^*}$, con $\rho^* \supseteq \rho.$

3. Σ^* no necesariamente es cerrada bajo testigos (podría haber fórmulas en $\Sigma^* \setminus \Sigma$ que sean existenciales, por ejemplo que en Σ haya fórmulas que empiezen con dos existenciales, digamos $\exists x \, \exists y \, \alpha$).

Pre–lema. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

Si Σ es finitamente satisfacible, entonces Σ^* es finitamente satisfacible

Prueba: Supongamos que $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ y que es finitamente satisfacible. Veamos que Σ^* también. Sea pues, $\Gamma \in \wp_\omega(\Sigma^*)$ y encontremos una $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$ tal que $\mathfrak{C} \models \Gamma.$

Si fuera el caso en que $\Gamma \subseteq \Sigma,$ la prueba es trivial. Supongamos ahora que,

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\sigma^*_1, \ldots, \sigma^*_m\}$$

donde:

1. $\Gamma_1 \in \wp_\omega(\Sigma)$.
2. $m \in \mathbb{Z}^+$.
3. Para $j \in \{1,\ldots,m\}$ se tiene que:

   a) $\sigma_j \in \Sigma$ y **b**) $\sigma_j^* \neq \sigma_j$

De **3**.**b**), tenemos que para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$,

$$\sigma_j \leftrightharpoons \exists x_j \alpha_j(x_j) \qquad (*)$$

$$\text{y} \quad \sigma_j^* \leftrightharpoons \alpha_j\left(x_j / c_{\sigma_j}\right) \qquad (**)$$

Por **1**. y de **3**.**a**), tenemos que el conjunto

$$\Gamma' = \Gamma_1 \cup \{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\}$$

es un subconjunto finito de Σ. Por hipótesis, Γ' es satisfacible y de aqui que hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma'$.

Por un lado, tenemos que $\mathfrak{A} \models \Gamma_1$. Por otro lado, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$

$$\mathfrak{A} \models \sigma_j \quad \text{es decir} \quad \mathfrak{A} \models \exists x_j \alpha_j(x_j)$$

Por Tarski, tenemos que para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$ hay un $a_j \in A$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \alpha_j(x_j)\left[x_j / a_j\right]$$

Ahora consideremos $\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{A}, a_1,\ldots,a_m \rangle$. Si interpretamos $c_{\sigma_j}^{\mathfrak{B}} = a_j$, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$, resulta ser que $\mathfrak{B}$ es una expansión de $\mathfrak{A}$ de tipo $\rho \cup \{c_{\sigma_1},\ldots,c_{\sigma_m}\}$.

Tenemos pues que, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathfrak{B} \models \alpha_j(x_j)\left[x_j / a_j\right]$ y por tanto

$$\mathfrak{B} \models \alpha_j(x_j)\left[x_j / c_{\sigma_j}^{\mathfrak{B}}\right]$$

De esto y por el Lema de Sustitución (teniendo en cuenta que una constante es libre para cualquier variable en cualquier fórmula) obtenemos que $\mathfrak{B} \models \alpha_j\left(x_j / c_{\sigma_j}\right)$. Y por (**), $\mathfrak{B} \models \sigma_j^*$.

Como $\mathfrak{B}$ es una expansión de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} \models \Gamma_1$, tenemos que $\mathfrak{B} \models \Gamma_1$. Resumiendo, tenemos que $\mathfrak{B} \models \Gamma$.

Finalmente, como $\rho \cup \{c_{\sigma_1},\ldots,c_{\sigma_m}\} \subseteq \rho^*$, hay una expansión $\mathfrak{C}$, de $\mathfrak{B}$, de tipo ρ^* que es modelo de Γ. †

Para lograr una extensión cerrada bajo testigos, lo que es pertinente es iterar el proceso anterior y esto se logra con recursión. Con ello obtenemos el segundo resultado preliminar a la prueba del Metateorema de Compacidad.

Lema$_2$. $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Si Σ es finitamente satisfacible, entonces hay un Δ tal que

i). $\Sigma \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$, con $\rho' \supseteq \rho$.

ii). Δ es finitamente satisfacible.

iii). Δ es cerrado bajo testigos.

Prueba. Definimos recursivamente la familia $\left\{\Delta_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$ como sigue:

I) $\Delta_0 = \Sigma$.

II) Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\Delta_{n+1} = (\Delta_n)^*$.

Definimos también,

$$\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$$

Observaciones:

a). $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}$. Así, $\left\{\Delta_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$ forma una $\subseteq$–cadena

b). $\rho(\Delta_0) = \rho(\Sigma) = \rho$

c). $\forall n \in \mathbb{N}, \rho(\Delta_{n+1}) = \rho(\Delta_n) \cup \left\{c_\sigma \ / \ \sigma \in \Delta_n \text{ y } \sigma^* \neq \sigma\right\}$.

Veamos que Δ cumple con lo requerido:

i). $\Sigma = \Delta_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Delta$. Y

$$\rho(\Delta) = \rho\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho(\Delta_n) \supseteq \rho(\Delta_0) = \rho.$$

ii). Por la definición de Δ, de la **Observación a**). y de la **Proposición**$_{\mathbf{12}}$, basta probar que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_n \text{ es finitamente satisfacible.}$$

y esto se hace usando inducción sobre $\mathbb{N}$, lo cual es inmediato usando el **Pre–lema**.

iii). Δ es cerrado bajo testigos. Supongamos que $\exists x\alpha(x) \in \Delta$ y pongamos $\sigma \rightleftharpoons \exists x\alpha(x)$.

Como $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$, hay pues, un natural n_0 tal que $\sigma \in \Delta_{n_0}$. Por definición, $\sigma^* = \alpha\left(x / c_\sigma\right) \in \Delta_{n_0+1}$, con $c_\sigma \in \rho(\Delta_{n_0+1})$.

Así, hay una constante $c_\sigma \in \rho(\Delta)$ tal que $\alpha\left(x \ / \ c\right) \in \Delta$. †