Pasemos ahora al tercer resultado necesario para nuestra pueba del Metateorema de Compacidad. Antes una,

Definición. $T \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. T es una *Teoría de Henkin* syss T es una f–teoría, finítamente satisfacible, f–completa y cerrada bajo testigos.

El resultado dice así,

Lema$_3$. Todo conjunto de enunciados finítamente satisfacible, se puede extender a una Teoría de Henkin:

Si $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$, finitamente satisfacible, entonces hay un T tal, que:

i). $\Sigma \subseteq T \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$, con $\rho' \supseteq \rho$, y

ii). T es una teoría de Henkin.

Prueba. Para cada conjunto Φ de enunciados finítamente satisfacible, escribiremos $ECO(\Phi)$ y $ECT(\Phi)$ para denotar a uno de los conjuntos cuya existencia se garantizan en el **Lema**$_1$ y en el **Lema**$_2$, respectivamente.

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ un conjunto finitamente satisfacible.

Definimos Recursivamente la familia $\left\{T_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$ como sigue:

I). $T_0 = \Sigma$.

II). a) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \quad T_{2n+1} = ECO(T_{2n})$

b) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \quad T_{2n+2} = ECT(T_{2n+1})$

Así, por ejemplo tenemos

$$\Sigma \subseteq ECO(\Sigma) \subseteq ECT(ECO(\Sigma)) \subseteq ECO(T_2) \subseteq ECT(T_3) \subseteq \ \ldots \ \subseteq \ \ldots$$

algunas observaciones que se desprenden de la definición anterior son:

1). $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}\ (T_n \subseteq T_{n+1})$. Es decir, forman una $\subseteq$–cadena.
Inmediato del **Lema**$_1$**i**) y del **Lema**$_2$**i**).

2). a) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \quad \rho(T_{2n}) = \rho(T_{2n+1})$ Inmediato del **Lema**$_1$**i**)

b) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \quad \rho(T_{2n+1}) \subseteq \rho(T_{2n+2})$ Inmediato del **Lema**$_2$**i**)

c) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \quad \rho(T_n) \subseteq \rho(T_{n+1})$ Inmediato de a) y b)

3). $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}$ (T_n es finítamente satisfacible). Inmediato del **Lema**$_1$**ii**) y del **Lema**$_2$**ii**).

Ahora, **definimos**

$$T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n.$$

Veamos que T es una Teoría de Henkin que extiende a Σ :

i). $\Sigma \subseteq T \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$ con $\rho' \supseteq \rho$:
Por un lado $\Sigma = T_0 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = T$ y por otro
$\rho = \rho(\Sigma) = \rho(T_0) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho(T_n) = \rho(T)$. Tomar $\rho' = \rho(T)$.

ii). T es una Teoría de Henkin :

a). T es finítamente satisfacible:
Inmediato de **1**)., **3**). y de la **Proposición**$_{\mathbf{12}}$.

b). T es una f–teoría f–completa:
Sea $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho'}$, puesto que $\rho' = \rho(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho(T_n)$, por **2.c**) tenemos que hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho(T_{2n_0+1})}$. Ahora bien, por el **Lema**$_1$ y de la definición de T_{2n_0+1}, ésta es una f–teoría f–completa y por la **Proposición**$_{\mathbf{10.2}}$, tenemos:

$$\sigma \in T_{2n_0+1} \quad \text{o bien} \quad \neg\sigma \in T_{2n_0+1}$$

en cualquier caso:

$$\sigma \in T \quad \text{o bien} \quad \neg\sigma \in T$$

Finalmente, por la **Proposición**$_{\mathbf{10.3}}$ y de **ii**).**a**)., tenemos lo que queríamos.

c). T es cerrada bajo testigos:
Supongamos que $\exists x\alpha(x) \in T$. De la definición de T y de **1**), tenemos que para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que $\exists x\alpha(x) \in T_{2n_0+2}$.

Pero de la definición de T_{2n_0+2} y gracias al **Lema**$_2$, se tiene que T_{2n_0+2} es cerrada bajo testigos. Por tanto, $\exists x\alpha(x)$ tiene un testigo en T_{2n_0+2}.

Por lo que T, que extiende a T_{2n_0+2}, resulta ser cerrada bajo testigos. †