Pasemos ahora al último resultado previo a la prueba del Metateorema de Compacidad.

Lema$_4$. Toda Teoría de Henkin tiene modelo.
Prueba. Sea $T \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ una Teoría de Henkin, veamos que es satisfacible. Para construir un modelo para T, necesitamos dar un par de definiciones y algunos resultados. Sea

$$A' = \left\{\tau \in TRM_\rho \ / \ \tau \text{ es cerrado}\right\}$$

Afirmación$_1$. $A' \neq \emptyset$.
Prueba: Puesto que T es f–teoría, se tiene que $UV_\rho \subseteq T$. En particular, tenemos que $\exists v_{28}(v_{28} \approx v_{28}) \in UV_\rho \subseteq T$. Ahora bien, como T es cerrada bajo testigos, hay una constante $c \in \mathcal{C}_\rho$ tal, que $(c \approx c) \in T$. Así, $c \in A'$.

Definimos una relación binaria, $\equiv$, sobre A', como sigue: Si $\tau, \tau' \in A'$ entonces

$$\tau \equiv \tau' \quad \text{syss} \quad (\tau \approx \tau') \in T$$

Afirmación$_2$. La relación $\equiv$, es de equivalencia sobre A'.
Prueba: Es directa, usando que $UV_\rho \subseteq T$ y de que T es cerrado bajo consecuencias finitas. †

Notación: 1) Si $\tau \in A'$, escribiremos $\widetilde{\tau} = \left\{\tau' \in A' \ / \ \tau' \equiv \tau\right\}$

2) $A = A'/\equiv \ = \left\{\widetilde{\tau} \ / \ \tau \in A'\right\}$

En cada clase de equivalencia, hay una constante.

Afirmación$_3$. Para cada $\tau \in A'$, hay una $c \in \mathcal{C}_\rho$ tal que $\widetilde{c} = \widetilde{\tau}$.
Prueba. Sea pues $\tau \in A'$. Tenemos que $\exists v_0(v_0 \approx \tau) \in UV_\rho \subseteq T$. Ahora, como T es cerrada bajo testigos, hay una $c \in \mathcal{C}_\rho$ tal que $(c \approx \tau) \in T$ es decir que $c \equiv \tau$ y por tanto $\widetilde{c} = \widetilde{\tau}$. †

Afirmación$_4$. Sean $f \in \mathcal{F}^n_\rho$ y $P \in \mathcal{P}^n_\rho$ y sean $\tau_1, \tau'_1, \ldots, \tau_n, \tau'_n \in A'$. Así:
Si $\tau_1 \equiv \tau'_1, \ldots, \tau_n \equiv \tau'_n$, entonces

•) $f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv f(\tau'_1, \ldots, \tau'_n)$. y

• •) $P(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T$ syss $P(\tau'_1, \ldots, \tau'_n) \in T$.

Prueba: Es directa, usando las definiciones y las propiedades de T. †

Pasemos ahora a **definir** una estructura $\mathfrak{A}$, de tipo ρ, como sigue :

I). El Universo de $\mathfrak{A}$, es A.

II). **a**) Si $c \in \mathcal{C}_\rho$, entonces $c^{\mathfrak{A}} = \widetilde{c}$.

b) Si $f \in \mathcal{F}^n_\rho$, considere la operación $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ dada por :

si $\widetilde{\tau_1}, \ldots, \widetilde{\tau_n} \in A$, entonces $f^{\mathfrak{A}}(\widetilde{\tau_1}, \ldots, \widetilde{\tau_n}) = \widetilde{f(\tau_1, \ldots, \tau_n)}$

c) Si $P \in \mathcal{P}^n_\rho$, considere la relación $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ dada por :

si $\widetilde{\tau_1}, \ldots, \widetilde{\tau_n} \in A$, entonces $\langle \widetilde{\tau_1}, \ldots, \widetilde{\tau_n} \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ syss $P(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T$.

Obsérvese que $A \neq \emptyset$ debido a la **Afirmación**$_1$. Y el hecho de que $f^{\mathfrak{A}}$ y $P^{\mathfrak{A}}$ estén bien definidas, es gracias a la **Afirmación**$_4$. Verémos más adelante que $\mathfrak{A}$ satisface a T antes,

Afirmación$_5$. Para todo $\tau \in A'$, se tiene que $\tau^{\mathfrak{A}} = \widetilde{\tau}$.

prueba. Se hará por inducción sobre la formación de ρ–términos :

i) Sea $c \in \mathcal{C}_\rho$, Por **II.a**), se tiene que $c^{\mathfrak{A}} = \widetilde{c}$.

ii) Sea $f \in \mathcal{F}^n_\rho$, y sean $\tau_1, \ldots, \tau_n \in A'$.

Supongamos inductivamente que $\tau_1^{\mathfrak{A}} = \widetilde{\tau_1}, \ldots,\ \tau_n^{\mathfrak{A}} = \widetilde{\tau_n}$. Así

$$\begin{aligned}
\Big(f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Big)^{\mathfrak{A}} &= f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}) && \text{Interpretación de } \rho\text{–término (cerrado)} \\
&= f^{\mathfrak{A}}(\widetilde{\tau_1}, \ldots, \widetilde{\tau_n}) && \text{Hipótesis Inductiva y } f^{\mathfrak{A}} \text{ es función} \\
&= \widetilde{f(\tau_1, \ldots, \tau_n)} && \text{Definición } \mathbf{II.b})
\end{aligned}$$

†

Pasemos finalmente a ver que $\mathfrak{A} \models T$. Probaremos algo más fuerte:

Afirmación$_6$. Para cualquier $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$ se tiene que:

$$\sigma \in T \qquad \text{syss} \qquad \mathfrak{A} \models \sigma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ✠$$

Prueba. Esta la haremos por *Inducción Modificada* sobre el número de símbolos que aparecen en un ρ–enunciado σ, $\mid \mathcal{L}_\rho(\sigma) \mid$:

Sea pues $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$ tal, que $\mid \mathcal{L}_\rho(\sigma) \mid = m$ y supongamos inductivamente que para cualquier $\sigma' \in \mathcal{L}^0_\rho$, si $\mid \mathcal{L}_\rho(\sigma) \mid < m$, entoces σ' tiene la propiedad ✠. Tenemos 5 casos posibles:

CASO$_1$. $\sigma \rightleftharpoons (\tau_1 \approx \tau_2)$, donde $\tau_1, \tau_2 \in A'$:

$\mathfrak{A} \models (\tau_1 \approx \tau_2)$	syss	$\tau_1^{\mathfrak{A}} = \tau_2^{\mathfrak{A}}$	Tarski
	syss	$\widetilde{\tau_1} = \widetilde{\tau_2}$	**Afirmación**$_5$
	syss	$\tau_1 \equiv \tau_2$	propiedades de $\equiv$
	syss	$(\tau_1 \approx \tau_2) \in T$	definición de $\equiv$

CASO$_2$. $\sigma \rightleftharpoons P(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, donde $P \in \mathcal{P}_\rho^n$ y $\tau_1,\ldots,\tau_n \in A'$:

$\mathfrak{A} \models P(\tau_1,\ldots,\tau_n)$	syss	$\langle \tau_1^{\mathfrak{A}},\ldots,\tau_n^{\mathfrak{A}}\rangle \in P^{\mathfrak{A}}$	Tarski
	syss	$\langle \widetilde{\tau_1},\ldots,\widetilde{\tau_n}\rangle \in P^{\mathfrak{A}}$	**Afirmación**$_5$
	syss	$P(\tau_1,\ldots,\tau_n) \in T$	por **II.c**)

CASO$_3$. $\sigma \rightleftharpoons (\neg\sigma')$, donde $\sigma' \in \mathcal{L}_\rho^0$:

$\mathfrak{A} \models (\neg\sigma')$	syss	$\mathfrak{A} \not\models \sigma'$	$\sigma' \in \mathcal{L}_\rho^0$
	syss	$\sigma' \notin T$	por ✠, pues $\mid \mathcal{L}_\rho(\sigma') \mid < m$
	syss	$(\neg\sigma') \in T$	por (*)

(*) :

$\Rightarrow]$ Si $\sigma' \notin T$ por la f–completud de la f–teoría T, tenemos que $(\neg\sigma') \in T$

$\Leftarrow]$ Si $(\neg\sigma') \in T$ entonces $\sigma' \notin T$, pues en caso contrario $\{\sigma',\neg\sigma'\}$ sería un subconjunto finito de T no–satisfacible, contradiciendo que T es finítamente satisfacible.

CASO$_4$. $\sigma \rightleftharpoons (\sigma_1 \vee \sigma_2)$, donde $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathcal{L}_\rho^0$:

$\mathfrak{A} \models (\sigma_1 \vee \sigma_2)$	syss	$\mathfrak{A} \models \sigma_1$ o $\mathfrak{A} \models \sigma_2$	Tarski
	syss	$\sigma_1 \in T$ o $\sigma_2 \in T$	por ✠, pues $\mid \mathcal{L}_\rho(\sigma_1) \mid, \mid \mathcal{L}_\rho(\sigma_2) \mid < m$
	syss	$(\sigma_1 \vee \sigma_2) \in T$	por (**)

(**) :

$\Rightarrow]$ Sup. s.p.g. que $\sigma_1 \in T.$ Como $\sigma_1 \models (\sigma_1 \vee \sigma_2)$ y T es f–teoría tenemos que $(\sigma_1 \vee \sigma_2) \in T$

$\Leftarrow]$ Supongamos que $(\sigma_1 \vee \sigma_2) \in T.$ Como $(\sigma_1 \vee \sigma_2) \models \sigma_1$ o $(\sigma_1 \vee \sigma_2) \models \sigma_2$ y de que T es f–teoría tenemos que $\sigma_1 \in T$ o $\sigma_2 \in T.$

CASO$_5$. $\sigma \rightleftharpoons (\exists x\alpha(x))$, donde $\alpha \in \mathcal{L}_\rho^1$:

$\mathfrak{A} \models \exists x\alpha(x)$	syss	hay $\widetilde{\tau} \in A,\ \mathfrak{A} \models \alpha(x)[\ \widetilde{\tau}\ ]$	Tarski
	syss	hay $c \in \mathcal{C}_\rho,\ \mathfrak{A} \models \alpha(x)[\ \widetilde{c}\ ]$	**Afirmación**$_3$
	syss	hay $c \in \mathcal{C}_\rho,\ \mathfrak{A} \models \alpha(x)[\ c^{\mathfrak{A}}\ ]$	**Afirmación**$_5$
	syss	hay $c \in \mathcal{C}_\rho,\ \mathfrak{A} \models \alpha\big(x / c\big)$	Lema de Sustitución
	syss	hay $c \in \mathcal{C}_\rho,\ \alpha\big(x / c\big) \in T$	Por ✠, pues $\Big\lvert \mathcal{L}_\rho\Big(\alpha\Big(x\ /\ c\Big)\Big)\Big\rvert < m$
	syss	$(\exists x\alpha(x)) \in T$	(***)

(***) :

$\Leftarrow$] Por ser T cerrada bajo testigos.

$\Rightarrow$] Si $c \in \mathcal{C}_\rho$, y $\alpha\left(x / c\right) \in T$, entonces $(\exists x\alpha) \in T$,
pues $\alpha\left(x / c\right) \models (\exists x\alpha)$ y T es f–teoría. †

De este resultado desprendemos que $\mathfrak{A} \models T$.

Así, toda teoría de Henkin es satifacible o si se prefiere toda teoría de Henkin tiene un Modelo.