METATEOREMA DE COMPACIDAD

Todo conjunto de ρ–enunciados finítamente satisfacible, es satisfacible.

Prueba. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ finítamente satisfacible. Por el **Lema**$_3$, Σ se puede extender a una ρ'–teoría de Henkin, digamos T. Así, tenemos que $\Sigma \subseteq T \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$ con $\rho \subseteq \rho'$. Ahora bien, por el **Lema**$_4$, T tiene un ρ'–modelo, digamos $\mathfrak{A}$, y por tanto de Σ. Finalmente , la restricción de $\mathfrak{A}$ a ρ, es decir $\mathfrak{A} \upharpoonright \rho$, es un ρ–modelo de Σ y por tanto Σ es satisfacible. †

Así, teniendo en la mano al **MTC**, las nociones de satisfacibilidad y finitamente satisfacible coinciden. No solo éstas, también la de consecuencia y consecuencia finita.

Proposición$_1$. Sea $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$.

Si $\Sigma \models \sigma$, entonces $\Sigma \models_f \sigma$.

Prueba. Esta la haremos por contrapositiva. Antes recordemos que, $\Sigma \models_f \sigma$ syss hay $\Gamma \in \wp_\omega(\Sigma)$ tal que $\Gamma \models \sigma$. Supongamos pues que, para todo $\Gamma \in \wp_\omega(\Sigma)$ se tiene $\Gamma \not\models \sigma$. Por Tarski, para todo $\Gamma \in \wp_\omega(\Sigma)$, $\Gamma \models \neg\sigma$ y de aqui que, todo $\Delta \in \wp_\omega(\Sigma \cup \{\neg\sigma\})$, Δ es finitamente satisfacible. Por el **MTC**, $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ es satisfacible y por tanto $\Sigma \not\models \sigma$. †

Como vemos, este último resultado es una consecuencia inmediata del Metateorema de Compacidad, en realidad son equivalentes.

Proposición$_2$. Si consecuencia lógica y consecuencia finita coinciden, se tiene el **M**eta**T**eorema de **C**ompacidad.
Prueba: **TAREA**.

Como un corolario a todo esto es que bajo la suposición del **MTC**, también coinciden las otras nociones, la de teoría y f–teoría, asi como completud y f–completud.

Un último comentario.

Para la prueba del **MTC** hemos usado el **A**xioma de **E**lección (**AE**). Para ser precisos, en la prueba del **Lema$_1$** y usamos o bien el **T**eorema de **B**uena **O**rdenación (para bien ordenar el conjunto de ρ–enunciados, $\mathcal{L}^0_\rho$) o bien el **L**ema de **Z**orn.

Sin embargo existen otras pruebas basadas en principios más débiles que el **AE**, por ejemplo, el **T**eorema del **U**ltrafiltro. De hecho, estos dos son equivalentes entre sí y resultan ser, al igual que el **AE**, independientes del resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, la de Zermelo-Fraenkel (**ZF**).