Hiper–Reales

$^{*}\mathfrak{R}$

Pasemos a dar una construcción de un conjunto que tenga la misma estructura que la de los reales, que los contenga y tenga también elementos “infinitamente pequeños”, por supuesto usaremos el Metateorema de Compacidad para ello.

Sea $\mathfrak{R}$ la saturación de $\mathbb{R}$ y construimos un Lenguaje Formal (de 1er. orden) para $\mathfrak{R}$, de la siguiente manera:

Para cada $n \in \mathbb{Z}^{+}$, sean:

a). $\mathcal{P}^n = \left\{ P_R \ / \ R \subseteq \mathbb{R}^n \right\}$ y

b). $\mathcal{F}^n = \left\{ F_f \ / \ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \right\}$, y sea

c). $\mathcal{C} = \left\{ c_r \ / \ r \in \mathbb{R} \right\}$.

Finalmente, consideramos el siguiente tipo de semejanza,

$$\rho = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{P}^n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}^n \right) \cup \mathcal{C}$$

Y consideremos el lenguaje formal (de 1er. Orden) asociado: $\mathcal{L}_\rho$. Si interpretamos en forma canónica, tenemos que $\mathfrak{R} \in V_\rho$.

Sea

$$TEO(\mathfrak{R}) = \left\{ \sigma \in \mathcal{L}_\rho^0 \ / \ \mathfrak{R} \models \sigma \right\}$$

$TEO(\mathfrak{R})$ es una ρ–Teoría Completa y es Satisfacible, pues tiene como modelo a $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R} \models TEO(\mathfrak{R})$).

Sea d una constante nueva, es decir que no aparece en ρ ($d \notin \mathcal{C}$) y consideremos la extensión del lenguaje a $\rho' = \rho \cup \{d\}$.

Sea $\Delta = \left\{ c_0 \, P_< \, d \ \& \ d \, P_< \, c_r \ / \ r \in \mathbb{R}^+ \right\} \subseteq \mathcal{L}_{\rho'}^0$ y consideremos a,

$$\Sigma = TEO(\mathfrak{R}) \cup \Delta \subseteq \mathcal{L}_{\rho'}^0$$

Proposición$_0$. Σ es satisfacible.
Prueba: Por el **MTC**, basta ver que Σ es finitamente satisfacible. Sea $\Gamma \in \wp_\omega(\Sigma)$. Sean $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que $\{c_{r_1}, \ldots, c_{r_n}\} = \mathcal{C} \cap \rho(\Gamma)$ y sea

$$r_0 = \frac{min_{<}\{r_1, \ldots, r_n\}}{2}$$

Así $r_0 \in \mathbb{R}$, tal que $0 < r_0 < min_{<}\{r_1, \ldots, r_n\}$. Si ponemos que $d^{\mathfrak{R}} = r_0$, tenemos que $\langle \mathfrak{R}, r_0 \rangle \in V_{\rho'}$, que es una ρ'–expansión de $\mathfrak{R}$. Por construcción,

$$\langle \mathfrak{R}, r_0 \rangle \models \Gamma$$

Teniendo pues que, Γ es satisfacible. †

Al ser $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$ satisfacible, hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y un $d^{\mathfrak{A}} \in A = \|\mathfrak{A}\| = \|\mathfrak{A}'\|$, tales que:

$$\mathfrak{A}' = \left\langle \mathfrak{A} \ , \ d^{\mathfrak{A}} \right\rangle \in V_{\rho'} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{A}' \models \Sigma$$

Observemos que, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \upharpoonright \rho$.

De ahora en adelante, solo nos fijaremos en la estructura $\mathfrak{A}$. Todo lo anterior, lo podemos resumir en la siguiente,

Proposición$_1$. Hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que,

1. $\mathfrak{A} \models TEO(\mathfrak{R})$ y
2. $d^{\mathfrak{A}} \in A$ con la propiedad de que para todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathfrak{A} \models \left(c_0 \, P_< \, x \ \ \& \ \ x \, P_< \, c_r \right) \left[\ d^{\mathfrak{A}} \ \right]$$

Pasemos a ver las relaciones que hay entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{R}$.

Definición$_1$. Sean ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$.
Diremos que $\mathfrak{B}$ es *Elementalmente Equivalente* a $\mathfrak{C}$ syss

$$\dot{\forall} \ \sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho^*} \left[\mathfrak{B} \models \sigma \ \text{ syss } \ \mathfrak{C} \models \sigma \right]$$

Lo cual denotamos por $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$.

No es dificil probar que $\equiv$ es una relacional de equivalencia, entre estructuras del mismo tipo.

Proposición$_2$. $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{A}$.
Prueba: Sea $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$. Probemos que $\mathfrak{R} \models \sigma$ syss $\mathfrak{A} \models \sigma$.

$\Rightarrow\Big]$ Si $\mathfrak{R} \models \sigma$, entonces $\sigma \in TEO(\mathfrak{R})$ y como $\mathfrak{A} \models TEO(\mathfrak{R})$, tenemos que $\mathfrak{A} \models \sigma$.

$\Leftarrow\Big]$ Supongamos que $\mathfrak{R} \not\models \sigma$. Así, $\mathfrak{R} \models \neg\sigma$; pero entonces, $\neg\sigma \in TEO(\mathfrak{R})$. Así, $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$ y por tanto $\mathfrak{A} \not\models \sigma$. †

Este resultado nos está diciendo que *toda afirmación que podamos expresar en el lenguaje formal de 1er. orden*, si fuera verdad en $\mathfrak{R}$ también lo sería en $\mathfrak{A}$ y viceversa.

Por ejemplo, se puede decir, en 1er. orden, ser un orden total, denso, sin extremos y como es verdad en $\mathfrak{R}$ también lo será $\mathfrak{A}$. También se puede decir lo mismo de ser un campo.

Veamos que hay una "copia fiel" de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{A}$. Para ello necesitamos una,

Definición₂. Sea ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$.
I. Diremos que h es un *Homomorfismo de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{C}$ syss

1. $h : B \to C$

2. h preserva estructura. Es decir,

a. h preserva relaciones:
Si $P \in \mathcal{P}^n$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$, se tiene que

$$\left\langle b_1, \ldots, b_n \right\rangle \in P^{\mathfrak{B}} \text{ syss } \left\langle h(b_1), \ldots, h(b_n) \right\rangle \in P^{\mathfrak{C}}$$

b. h preserva operaciones:
Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $F \in \mathcal{F}^n$, entonces para $b_1, \ldots, b_n \in B$

$$h\left(F^{\mathfrak{B}}\left(b_1, \ldots, b_n\right)\right) = F^{\mathfrak{C}}\left(h(b_1), \ldots, h(b_n)\right)$$

c. h manda elementos distinguidos en elementos distinguidos:
Si $c \in \mathcal{C}$, entonces

$$h(c^{\mathfrak{B}}) = c^{\mathfrak{C}}$$

Notación: $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$.

II.

1. Diremos que h es un *Monomorfismo de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{C}$ syss h es un homomorfismo inyectivo de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$. Y se denota por: $\mathfrak{B} \underset{h}{\hookrightarrow} \mathfrak{C}$.

2. Diremos que h es un *Epimorfismo de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{C}$ syss h es un homomorfismo suprayectivo de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$. También se dice que h es un homomorfismo de $\mathfrak{B}$ sobre $\mathfrak{C}$.

3. Diremos que h es un *Isomorfismo de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{C}$ syss h es un homomorfismo biyectivo de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$. Y se denota por: $\mathfrak{B} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{C}$.

Definición₃. Sea

$$h : \mathbb{R} \to A$$
$$\dot{\forall}\ r \in \mathbb{R}, \quad h(r) = (c_r)^{\mathfrak{A}}$$

Proposición₃. La función h es un monomorfismo de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{A}$. En símbolos,

$$\mathfrak{R} \underset{h}{\hookrightarrow} \mathfrak{A}$$

Prueba: Hay que ver que h es una función inyectiva que preserva las estructuras:

a). h es inyectiva:
Sean $r, s \in \mathbb{R}$ con $r \neq s$; entonces $\mathfrak{R} \models \neg(c_r \approx c_s)$. Por lo que, $\mathfrak{A} \models \neg(c_r \approx c_s)$ y así, $h(r) = (c_r)^{\mathfrak{A}} \neq (c_s)^{\mathfrak{A}} = h(s)$.

b). h preserva relaciones:
Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $P_R \in \mathcal{P}^n$, con $R \subseteq \mathbb{R}^n$. Así, para $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ tenemos,

$$\begin{array}{llll} \langle r_1, \ldots, r_n \rangle \in (P_R)^{\mathfrak{R}} & \text{syss} & \mathfrak{R} \models P_R(c_{r_1}, \ldots, c_{r_n}) & \text{Tarski} \\ & \text{syss} & \mathfrak{A} \models P_R(c_{r_1}, \ldots, c_{r_n}) & \mathfrak{R} \equiv \mathfrak{A} \\ & \text{syss} & \langle (c_{r_1})^{\mathfrak{A}}, \ldots, (c_{r_n})^{\mathfrak{A}} \rangle \in (P_R)^{\mathfrak{A}} & \text{Tarski} \\ & \text{syss} & \langle h(r_1), \ldots, h(r_n) \rangle \in (P_R)^{\mathfrak{A}} & \text{def. } h \end{array}$$

c). h preserva operaciones:
Sean $n \in \mathbb{Z}^+$, $F_f \in \mathcal{F}^n$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{array}{llll} h\big((F_f)^{\mathfrak{R}}(r_1, \ldots, r_n)\big) & = & h\big(f(r_1, \ldots, r_n)\big) & (F_f)^{\mathfrak{R}} = f \\ & = & \big(c_{f(r_1, \ldots, r_n)}\big)^{\mathfrak{A}} & \text{def. } h \\ & = & (F_f)^{\mathfrak{A}}\big((c_{r_1})^{\mathfrak{A}}, \ldots, (c_{r_n})^{\mathfrak{A}}\big) & (*) \\ & = & (F_f)^{\mathfrak{A}}\big(h(r_1), \ldots, h(r_n)\big) & \text{def. } h \end{array}$$

$(*)$: Puesto que $f(r_1, \ldots, r_n) = f(r_1, \ldots, r_n)$, tenemos que:
$\mathfrak{R} \models F_f(c_{r_1}, \ldots, c_{r_n}) \approx c_{f(r_1, \ldots, r_n)}$, y como $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{A}$, también tenemos que $\mathfrak{A} \models F_f(c_{r_1}, \ldots, c_{r_n}) \approx c_{f(r_1, \ldots, r_n)}$. Es decir:

$$(F_f)^{\mathfrak{A}}\big((c_{r_1})^{\mathfrak{A}}, \ldots, (c_{r_n})^{\mathfrak{A}}\big) = \big(c_{f(r_1, \ldots, r_n)}\big)^{\mathfrak{A}}$$

d). h manda elementos distinguidos en elementos distinguidos:
Sea $c_r \in \mathcal{C}$, con $r \in \mathbb{R}$. Así, $h\big((c_r)^{\mathfrak{R}}\big) = h(r) = (c_r)^{\mathfrak{A}}$. †

Proposición$_4$. Hay una ρ–estructura ${}^*\mathfrak{R}$, tal que $\|{}^*\mathfrak{R}\| \supseteq \mathbb{R}$ y $\mathfrak{A} \simeq {}^*\mathfrak{R}$.
Prueba: En el caso en que $\mathbb{R} \cap \|\mathfrak{A}\| = \emptyset$, la siguiente construcción se podría simplificar. Sea $A = \|\mathfrak{A}\|$. Consideremos un conjunto B tal que $B \cap \mathbb{R} = \emptyset$ y $A \underset{j}{\sim} B$.

Consideremos la función g con dominio A y cuya regla es:
Para todo $a \in A$, se tiene que

$$g(a) = \begin{cases} j(a) & \text{si} \quad a \notin h[\mathbb{R}] \\ \text{o} & \\ h^{-1}(a) & \text{si} \quad a \in h[\mathbb{R}] \end{cases}$$

la g es función, es inyectiva y es suprayectiva en su imagen, $g[A]$, y por construcción, $\mathbb{R} = h^{-1}\big[\ h[\mathbb{R}]\ \big] \subseteq g[A]$.

Dotamos a $g\,[A]$ de estructura de tipo ρ, a la cual la denotaremos por ${}^*\mathfrak{R}$, y será de tal suerte que $\mathfrak{A} \underset{g}{\simeq} {}^*\mathfrak{R}$:

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$.

I. Para $R \subseteq \mathbb{R}^n$, tenemos $P_R \in \mathcal{P}^n_\rho$. Sea $(P_R)^{{}^*\mathfrak{R}} = {}^*R$, donde:
${}^*R \subseteq g\,[A]^n$ tal que, para todos $s_1,\ldots,s_n \in g\,[A]$,

$$\langle s_1,\ldots, s_n\rangle \in {}^*R \text{ syss } \langle g^{-1}(s_1),\ldots, g^{-1}(s_n)\rangle \in P_R^{\mathfrak{A}}$$

II. Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tenemos $F_f \in \mathcal{P}^n_\rho$. Sea $(F_f)^{{}^*\mathfrak{R}} = {}^*f$, donde:
${}^*f : g\,[A]^n \to g\,[A]$ tal que, para todos $s_1,\ldots,s_n \in g\,[A]$,

$${}^*f\big(s_1,\ldots, s_n\big) = g\Big((F_f)^{\mathfrak{A}}\big(g^{-1}(s_1),\ldots, g^{-1}(s_n)\big)\Big)$$

III. Para $r \in \mathbb{R}$, tenemos $c_r \in \mathcal{C}_\rho$. Sea $(c_r)^{{}^*\mathfrak{R}} = r$.

Por construcción, tenemos que: ${}^*\mathfrak{R} \in V_\rho$, $\|{}^*\mathfrak{R}\| = g\,[A] \supseteq \mathbb{R}$ y $\mathfrak{A} \underset{g}{\simeq} {}^*\mathfrak{R}$. †

Debido a la construcción de ${}^*\mathfrak{R}$ tenemos de inmediato el siguiente,

Corolario$_5$. $\mathfrak{R}$ es una *subestructura simple* de ${}^*\mathfrak{R}$, en símbolos, $\mathfrak{R} \subseteq {}^*\mathfrak{R}$. Es decir,

0). $\|\mathfrak{R}\| = \mathbb{R} \subseteq g\,[A] = \|{}^*\mathfrak{R}\|$.

i). Si $R \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $P_R \in \mathcal{P}^n_\rho$ y $R = (P_R)^{\mathfrak{R}} = (P_R)^{{}^*\mathfrak{R}} \cap \mathbb{R}^n$.

ii). Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces $F_f \in \mathcal{P}^n_\rho$ y $f = (F_f)^{\mathfrak{R}} = (F_f)^{{}^*\mathfrak{R}} \restriction \mathbb{R}^n$.

iii). Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $c_r \in \mathcal{C}_\rho$ y $r = (c_r)^{\mathfrak{R}} = (c_r)^{{}^*\mathfrak{R}}$. †

Notación: Si $s \in \rho$, escribiremos ${}^*s$ para denotar $s^{\mathfrak{R}}$.

Proposición$_6$. (Metateorema del Isomorfismo).
Sea ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y sean $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$ tales que $\mathfrak{B} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{C}$. Así,

Para toda $\alpha \in \mathcal{L}^n_\rho$ y todos $a_1,\ldots,a_n \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \alpha\,\big[a_1,\ldots, a_n\big] \text{ syss } \mathfrak{C} \models \alpha\,\big[h(a_1),\ldots, h(a_n)\big]$$

Prueba: **PENDIENTE**. †

Corolario$_7$. Sea ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y sean $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$.

$$\text{Si } \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}, \text{ entonces } \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$$

Prueba: Supongamos que $\mathfrak{B} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{C}$ y que $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho^*}$. Así, para cualquier $b \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \sigma \text{ syss } \mathfrak{B} \models \sigma\,[b] \text{ syss } \mathfrak{C} \models \sigma\,[h(b)] \text{ syss } \mathfrak{C} \models \sigma$$ †

Corolario$_8$. $\mathfrak{R} \equiv {}^*\mathfrak{R}$.
Prueba: Puesto que $\mathfrak{A} \simeq {}^*\mathfrak{R}$, tenemos que $\mathfrak{A} \equiv {}^*\mathfrak{R}$. De esto y de la **Proposición$_2$** obtenemos que $\mathfrak{R} \equiv {}^*\mathfrak{R}$. †

Ejemplos:

1. $\|{}^*\mathfrak{R}\| = g[A] = (P_{\mathbb{R}})^{{}^*\mathfrak{R}} = {}^*\mathbb{R}$.
Pues $\mathfrak{R} \models \forall x\, P_{\mathbb{R}}(x)$ y por tanto ${}^*\mathfrak{R} \models \forall x\, P_{\mathbb{R}}(x)$.
A los elementos de ${}^*\mathbb{R}$ les llamaremos, *Hiperreales.*

2. Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $C_r \in \mathcal{C}$ y $r = (C_r)^{{}^*\mathfrak{R}} = (C_r)^{\mathfrak{R}} = {}^*r$.
A los elementos *de* $\mathbb{R}$, les llamaremos *Reales Estandar.*

3. Sea $i_0 = g(d^{\mathfrak{A}}) = j(d^{\mathfrak{A}}) \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$.
Tenemos que si $r \in \mathbb{R}^+$, entonces $\mathfrak{A} \models \left(c_0\, P_< \,x\ \&\ x\, P_<\, c_r\right)[d^{\mathfrak{A}}]$. Puesto que $\mathfrak{A} \underset{g}{\simeq} {}^*\mathfrak{R}$, se tiene que ${}^*\mathfrak{R} \models \left(c_0\, P_<\, x\ \&\ x\, P_<\, c_r\right)\left[\ g(d^{\mathfrak{A}})\ \right]$. Así,
$0 \ {}^*\!< \ i_0 \ {}^*\!< \ r$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.
A los elementos de ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ les llamaremos *Reales No–Estandar.*

4. $\left\langle {}^*\mathbb{R}\, ,\ {}^*\!<\ \right\rangle$ es un orden denso, sin extremos.

5. $\left\langle {}^*\mathbb{R}\, ,\ {}^*+\ ,\ {}^*\cdot\ ,\ 0\ ,\ 1 \right\rangle$ es un campo.

6. Las operaciones ${}^*+$ y ${}^*\cdot$ son compatibles (y por tanto congruentes) con el orden, ${}^*<$. Así, $\left\langle {}^*\mathbb{R}\, ,\ {}^*<\ ,\ {}^*+\ ,\ {}^*\cdot\ ,\ 0\ ,\ 1 \right\rangle$ es un campo ordenado. Además, tiene a $\left\langle \mathbb{R}\, ,\ <\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ 0\ ,\ 1 \right\rangle$ como un subcampo propio.

7. El inverso aditivo de i_0, a saber $({}^*-)\, i_0$, es un hiperreal (de hecho un real no-estandar) que en el orden ${}^*<$, es un negativo, pero mayor que todo real estandar negativo.

8. El inverso multiplicativo de i_0, a saber $(i_0)^{*(-1)}$, es un hiperreal que es mayor, en el orden ${}^*<$, que todo real estandar; es decir, para todo $r \in \mathbb{R}$, $r\ {}^*\!< i_0^{*(-1)}$:
Basta probarlo para el caso en que $r \in \mathbb{R}^+$. Sea pues, $r > 0$, así $0 < r^{-1}$ y por como es i_0 tenemos, $i_0\ {}^*\!< r^{-1}$. Por lo que al multiplicar por el inverso multiplicativo de i_0, obtenemos: $1\ {}^*\!< (r^{-1})\ {}^*\cdot\ \left(i_0^{*(-1)}\right)$ y de aquí, multiplicando por r, tenemos $r\ {}^*\!< i_0^{*(-1)}$.

Corolario$_9$. ${}^*\mathbb{R}$ no cumple con la propiedad Arquimideana, es decir, es no–arquimideana.
Prueba: Tanto i_0 como su inverso multiplicativo, $i_0^{*(-1)}$, son testigos de la no–arquimideanidad de ${}^*\mathbb{R}$. †

Corolario$_{10}$. ${}^*\mathbb{R}$ no cumple con el axioma del supremo, es decir, no es completo.
Prueba: $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ está acotado superiormente, por ejemplo por $i_0^{*(-1)}$; y no tiene un

supremo. †

Observación: Estas proposiciones nos dicen que las propiedades de “ser Completo” y “ser Arquimideano” **no se pueden expresar como enunciados en un Lenguaje Formal de primer Orden**. A esto se le suele decir que **no** son *propiedades elementales* o **no** son *propiedades de primer orden.*

Proposición$_{11}$. $\langle \mathbb{R}, < \rangle \not\cong \langle {}^*\mathbb{R}, {}^*< \rangle$

Prueba: Los isomorfismos preservan “ser cota superior” y por tanto manda “supremos” en “supremos”, por tanto los isomorfismos preservan “ser completo”, a pesar de no ser una propiedad de primer orden. †

Pasemos ahora a ver más de cerca las propiedades de ${}^*\mathbb{R}$.

Definición$_4$. Sea $a \in {}^*\mathbb{R}$. Decimos que,

i). a es un *Finito* syss hay un $r \in \mathbb{R}$, tal que ${}^*| \, a \, |^* < r$. Sea FIN el conjunto de los hiperreales finitos.

ii). a es un *Infinito* syss para todo $r \in \mathbb{R}$, ${}^*| \, a \, |^* > r$.

iii). a es un *Infinitesimal* para todo $r \in \mathbb{R}^+$, ${}^*| \, a \, |^* < r$. Sea Inf el conjunto de los hiperreales infinitesimales.

Observación: El 0 es un infinitesimal. Esto no entra en la idea original de dicha noción, sin embargo aquí lo consideraremos como tal, por cuestiones técnicas. De hecho:

$$\mathbb{R} \cap Inf = \{0\}$$

El cero, 0, es el único infinitesimal estandar.

Convención: De ahora en adelante, por lo excesivo de la notación, **no** pondremos el asterisco $(*)$ sobre las relaciones y operaciones de ${}^*\mathbb{R}$.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R} \subsetneq FIN \subsetneq {}^*\mathbb{R}$
2. $Inf \subsetneq FIN.$
3. $i_0 \in Inf,\ \frac{i_0}{2} \in Inf,\ (i_0)^{-1} \notin FIN,$ e. d. $(i_0)^{-1} \in {}^*\mathbb{R} \setminus FIN$
4. Si $r \in \mathbb{R}$ e $i \in Inf,$ entonces $r \pm i \in FIN.$
5. Si $r \in \mathbb{R}$ e $i \in Inf^+$, entonces $r < i^{-1} - 1 < i^{-1} < i^{-1} + 1$

Proposición$_{12}$. Los hiperreales finitos, $FIN,$ forman un sub–anillo, conmutativo y con unidad, del campo de los hiperreales, $\langle\, {}^*\mathbb{R}\,,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ 0\ ,\ 1\,\rangle$.

Prueba: Puesto que $1 \in FIN \neq \emptyset$, basta probar que FIN es cerrado bajo $+$, $-$ y $\cdot$:

Sean $a,\ b \in FIN$. Hay $r,\ s \in \mathbb{R}$ tales que $|\ a\ | < r$ y $|\ b\ | < s$. Así:

$$|\ a \pm b\ | \leq |\ a\ | + |\ b\ | < r + s \in \mathbb{R}$$

y

$$|\ a \cdot b\ | = |\ a\ | \cdot |\ b\ | < r \cdot s \in \mathbb{R}$$ †

De hecho, el anillo de los finitos es un anillo ordenado.

Proposición$_{\mathbf{13}}$. Los infinitesimales, Inf, forman un ideal (bilateral) en el anillo de los hiperreales finitos, $\langle\, FIN\,,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ 0\ ,\ 1\,\rangle$.

Prueba: Tenemos que $0 \in Inf \subseteq FIN$, además cumple con:

i). $\langle\, Inf\,,\ +\ ,\ 0\,\rangle$ es un grupo (abeliano) bajo la adición.

Basta probar que Inf es cerrado bajo $+$, $-$:

Sean $i,\ j \in Inf$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Así, $|\ i\ | < \frac{r}{2}$ y $|\ j\ | < \frac{r}{2}$, por lo que

$$|\ i \pm j\ | \leq |\ i\ | + |\ j\ | < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

ii). Inf absorbe el producto entre un infinitesimal y un finito.

Sean $i \in Inf,\ a \in FIN$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Así, por un lado, hay un $s \in \mathbb{R}^+$ tal que $s > |\ a\ |$ y por otro lado, puesto que $i \in Inf$, se tiene que $\frac{r}{s} > |\ i\ |$; por tanto:

$$|\ a \cdot i\ | = |\ i \cdot a\ | = |\ i\ | \cdot |\ a\ | < \tfrac{r}{s} \cdot s = r$$ †

Observemos en particular que el producto de dos infinitesimales es otro infinitesimal, es decir Inf es cerado bajo la multiplicación, resultando que Inf forma un subanillo conmutativo **sin** unidad, del anillo de los hiperreales finitos, FIN.

Veamos que el ideal de los finitos es en realidad un ideal maximal. Para ello, necesitamos antes analizar el inverso multiplicativo de los hiperreales –obviamente de los distintos del cero.

Proposición$_{\mathbf{14}}$.

1. Sea $a \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Así, $a \in Inf$ syss $\frac{1}{a} \notin FIN$.
2. Si $a \in FIN \setminus Inf$, entonces $\frac{1}{a} \in FIN \setminus Inf$.

Prueba:

1. Sea $a \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{array}{llll} a \in Inf & \text{syss} & \dot{\forall}\, r \in \mathbb{R}^+,\ |\, a\,| < r & \text{Def } Inf \\ & \text{syss} & \dot{\forall}\, r \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1}{r} < \frac{1}{|a|} & r,\ |\, a\,| > 0 \\ & \text{syss} & \dot{\forall}\, s \in \mathbb{R}^+,\ s < \left|\, \frac{1}{a}\, \right| & \\ & \text{syss} & \frac{1}{a} \notin FIN & \text{Def } FIN \end{array}$$

2. Una prueba es inmediata de la anterior, demos otra. Supongamos pues que, $a \in FIN \setminus Inf.$ Así, hay reales estandar positivos, r y s tales que $r < |\, a\,| < s.$ Pero entonces, $\frac{1}{s} < \left|\, \frac{1}{a}\, \right| < \frac{1}{r}.$ Teniendo así, $\frac{1}{a} \in FIN \setminus Inf.$ †

Pasemos ahora a probar la maximalidad del ideal.

Proposición$_{15}$. El ideal Inf es maximal, en el anillo $FIN.$

Prueba: Sea Id un ideal en el anillo FIN tal, que $Inf \subsetneq Id \subseteq FIN.$ Demostremos que $Id = FIN.$ Sea $a \in Id \setminus Inf,$ así $a \in FIN \setminus Inf$ y por la proposición anterior, $\frac{1}{a} \in FIN \setminus Inf.$ Pero entonces, puesto que Id es un ideal, $1 = a \cdot \frac{1}{a} \in Id.$ Finalmente, si $b \in FIN,$ entonces $b = b \cdot 1 \in Id.$ †

Pasemos ahora a ver más de cerca al anillo $FIN,$ junto con su ideal $Inf.$

Definición$_5$. Diremos que los hiperreales finitos a y b están *Infinitamente Cercanos*, lo que denotaremos por $a \sim b,$ syss su diferencia es un infinitesimal. En símbolos:

$$\dot{\forall}\, a,\, b \in FIN \left[a \sim b \ \text{ syss } \ a - b \in Inf \right]$$

Proposición$_{16}$. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $FIN.$

Prueba:

1. $\dot{\forall}\, a \in FIN,\ a \sim a.$
Pues $a - a = 0 \in Inf$

2. $\dot{\forall}\, a, b \in FIN,\ a \sim b,$ entonces $b \sim a.$
Pues Inf es cerrado bajo inversos aditivos.

3. $\dot{\forall}\, a, b, c \in FIN,\ a \sim b$ y $b \sim c,$ entonces $a \sim c.$
Pues Inf es cerrado bajo diferencias. †

Observación: $\dot{\forall}\, r,\, s \in \mathbb{R},\ r \sim s$ syss $r = s.$

Es de esperarse que en cada clase de equivalencia, módulo $\sim$, haya un real estandar.

Proposición$_{17}$. Si $a \in FIN,$ entonces $a \sim r,$ para un único $r \in \mathbb{R}.$
Prueba: Sea $a \in FIN.$ Si $a \in \mathbb{R},$ el resultado se sigue inmediatamente de la observación anterior. Supongamos pues, que $a \in FIN \setminus \mathbb{R}.$

$\exists\,]$ Puesto que $a \in FIN,$ hay un $s \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mid a \mid < s.$ Consideremos el siguiente conjunto de hiperreales:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x < a\right\}$$

Tenemos que A es un subconjunto no–vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, pues $-s < a < s.$ Por tanto A tiene un supremo (en $\mathbb{R}$), digamos $r.$ Así $r \in \mathbb{R}$ tal que:

(**i**). r es cota superior de A :

$$\dot{\forall}\, x \in \mathbb{R}\; [x < a \Rightarrow x \leq r]$$ Y

(**ii**). r es la menor de las cotas superiores de A :

$$\dot{\forall}\, y \in \mathbb{R} \left[\dot{\forall}\, x \in \mathbb{R}\Big(x < a \Rightarrow x \leq y \Big) \Rightarrow r \leq y\right]$$

Afirmamos que $a - r \in Inf.$ Con la intención de llegar a una contradicción, supongamos lo contrario, que $a - r \notin Inf.$ Hay pues, un real estandar positivo t tal, que $\mid a - r \mid > t.$ Puesto que $a \notin \mathbb{R},$ tenemos que $a \neq r.$ Hay dos casos posibles:

$r < a\,]$ Aquí se tiene que, $0 < t < \mid a - r \mid = a - r$ y de aquí que $r < t + r < a,$ con $t + r \in \mathbb{R}.$ Asì, $t + r \in A;$ pero $r < t + r,$ lo que contradice (**i**).

$a < r\,]$ Tenemos que $t < \mid a - r \mid = r - a$ y de aquí que $a < r - t,$ con $r - t \in \mathbb{R}.$ Esto nos dice que $r - t$ es cota superior de $A,$ pero $r - t < r,$ pues $t > 0,$ y esto contradice (**ii**).

Por tanto $a \sim r.$

$!\,]$ Sean $r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a \sim r_1$ y $a \sim r_2.$ Puesto que la relación $\sim$ es de equivalencia, tenemos que $r_1 \sim r_2$ y de aquí que $r_1 = r_2.$ †

Con esto tenemos que todo hiperreal finito tiene una descomposición única.

Corolario$_{18}$. Para cada hiperreal finito $a,$ hay un único real estandar r y un único infinitesimal $i,$ tales que

$$a = r + i$$

A r se le llama *La parte Estandar de* $a,$ y a $i,$ *La parte Infinitesimal de* $a.$