Con el resultado anterior, podemos establecer la siguiente función:

Definición$_6$.

$$est : FIN \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\dot{\forall}\ a \in FIN,\ est(a) = r \text{ syss } a = r + i \text{ para algún } i \in Inf$$

Corolario$_{19}$. Para cualesquiera $a,\ b \in FIN$ se tiene,

a). $a \sim est(a)$.

b). $a = est(a) + i,$ para un único $i \in Inf.$

c). $est(a) = a$ syss $a \in \mathbb{R}.$ (Con lo que est es suprayectiva en $\mathbb{R}.$)

d). $est(a) = 0$ syss $a \in Inf.$

e). $a \sim b$ syss $est(a) = est(b).$

Osérvese que se puede reformular el hecho de que en cada clase de equivalencia, módulo $\sim$, hay un único real estandar, usando **a**) y **e**).

Definición$_7$. Sea $a \in FIN.$ La *Mónada de* a es la clase de equivalencia, módulo $\sim$, a la que pertenece:

$$[a] = \left\{ b \in FIN \ / \ b \sim a \right\}$$

Corolario$_{20}$.

a). Para $a \in FIN$ y $r \in \mathbb{R},$ se tiene que $est(a) = r$ syss $[a] = [r].$

b). Si $a, b \in FIN,$ entonces $[a] = [b]$ syss $est(a) = est(b).$

c). Para todo $r \in \mathbb{R},$ se tiene que $[r] = \left\{ r + i \ / \ i \in Inf \right\}.$

d). $[0] = Inf.$

Ahora bien, puesto que el anillo de los finitos, $FIN,$ tiene como relación de equivalencia a $\sim$, es decir "ser infinitamente cercano a", y por las clases de equivalencia a las mónadas, podemos intentar dar estructura de anillo al cociente, es decir a

$$FIN / \sim \ = \left\{ [r] \ / \ r \in \mathbb{R} \right\}$$

Las operaciones serán las inducidas, dicho de mejor manera, serán de tal suerte que las conocidas sean congruentes. Para ello,

Proposición$_{21}$. Sean $a,\ b,\ c \in FIN,$ tales que $a \sim c$ y $b \sim d.$ Así,

1. $a + b \sim c + d.$

2. $-a \sim -c$ y $a - b \sim c - d.$

3. $a \bullet b \sim c \bullet d.$

Prueba: Inmediata de la definición y de las propiedades. †

Debido a este resultado, podemos justificar la siguiente,

Definición$_8$. Sean $a, b \in FIN.$ Las operaciones $+'$, $-'$ y $\bullet'$ sobre $FIN/\sim$, quedan definidas como siguen:

1. $[a] +' [b] = [a + b],$

2. $-' \ [a] = [-a]$ y

3. $[a] \bullet' [b] = [a \bullet b].$

Proposición$_{22}$. $\langle FIN/\sim \ , \ +' \ , \ -' \ , \ \bullet' \ , [0], [1] \rangle$ forma un anillo conmutativo con unidad: Para $a, b, c \in FIN,$ se tiene:

a). Grupo abeliano bajo la $+'$:

i). $[a] +' ([b] +' [c]) = ([a] +' [b]) +' [c]$

ii). $[a] +' [b] = [b] +' [a]$

iii). $[0] +' [a] = [a]$

iv). $[a] +' (-' [a]) = [0]$

b). Anillo asociativo, con el $\bullet'$:

v). $[a] \bullet' ([b] \bullet' [c]) = ([a] \bullet' [b]) \bullet' [c].$

c). Leyes distributivas:

vi). $[a] \bullet' ([b] +' [c]) = ([a] \bullet' [b]) +' ([a] \bullet' [c]).$
$([b] +' [c]) \bullet' [a] = ([b] \bullet' [a]) +' ([c] \bullet' [a]).$

d). Anillo conmutativo:

vii). $[a] \bullet' [b] = [b] \bullet' [a].$

e). Anillo con unidad, $[1]$:

viii). $[1] \bullet' [a] = [a].$

Es claro que en el anillo de los hiperreales finitos, $FIN,$ no hay inversos multiplicativos para todos los elementos no–cero, *v.g.* para los elementos de $Inf.$ ¿Qué ocurre en el nuevo anillo cociente?

Por un lado, sabemos que si $a \in FIN \setminus Inf$, se tiene que $\frac{1}{a} \in FIN \setminus Inf$ y por tanto, $[\frac{1}{a}] \in FIN / \sim$. Ahora bien, de nuestras definiciones vemos que

$$[a] \cdot' \left[\frac{1}{a}\right] = \left[a \cdot \frac{1}{a}\right] = [1]$$

Por otro lado, también sabemos que $Inf = [0]$.

Concluimos que en el anillo cociente, los elementos que no son $[0]$, ¡tienen otro elemento tal, que al multiplicarlo por él, nos da el neutro multiplicativo! Podemos enunciar esto como sigue,

Proposición$_{23}$. $\left\langle FIN \;/\; \sim \;,\; +' \;,\; -' \;,\; \cdot' \;,\; [0] \,,\, [1] \right\rangle$ es un campo.

Donde para todo $[a] \neq [0]$, se tiene que

$$[a]^{(-1)'} = \frac{1}{[a]}' = \left[\frac{1}{a}\right]$$

El siguiente resultado, entre otras cosas, nos ayudará a establecer que est es un homomorfismo.

Proposición$_{24}$. Para $a, b \in FIN$,

1. $est(a + b) = est(a) + est(b)$.
2. $est(a \cdot b) = est(a) \cdot est(b)$.
3. $est(-a) = -est(a)$ y $est(a - b) = est(a) - est(b)$.

Prueba: Son inmediatas de la definición de est y usando las propiedades de campo de $^*\mathbb{R}$ y las de ideal de Inf. †

Proposición$_{25}$. Para $a, b \in FIN$,

1. $a \geq 0 \rightarrow est(a) \geq 0$.
2. $a \leq b \rightarrow est(a) \leq est(b)$.

Prueba: Ejercicio. †

Corolario$_{26}$. La función est, es un homomorfismo del anillo, conmutativo y con unidad, de los hiperreales finitos, FIN, sobre el campo de los números reales, $\mathbb{R}$, con núcleo el ideal, maximal, de los infinitesimales, Inf. †

Proposición$_{26}$. $FIN \;/\; \sim$ y $\mathbb{R}$, como campos ordenados, son isomorfos.

Prueba: Sea,

$$h : FIN / \sim \;\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{para cada } a \in FIN, \quad h([a]) = est(a)$$

h es el isomorfismo buscado. †