Lógica Matemática II. Tarea-Examen I.

Prof. Rafael Rojas Barbachano.
Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.

01 - 09 - 2016

1. Cálculo de Predicados (sintáctico)

1 pto. Demuestra los dos incisos.

- Demuestra que la regla de inferencia ***Generalización*** preserva las fórmulas Universalmente Verdaderas del lenguaje $\mathscr{L}$.
- Demuestra que los axiomas $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{A_3}$ de ***CP*** son Universalmente Verdaderos.

1 pto. Demuestra los siguientes teoremas del ***CP*** utilizando únicamente la regla de inferencia ***Modus Pnens*** y los axiomas $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ y $\mathbf{A_3}$.

- $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
- $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$
- $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

2. Variables Libres y Acotadas

1.5 pts. Para $\tau \in \mathbf{TRM}_\rho$ definimos de manera recursiva el conjunto de variables de τ de la siguiente manera.

$$var(c) \approx \emptyset$$
$$var(v_n) \approx \{v_n\}$$
$$var(f(\tau_1, ..., \tau_n)) \approx \bigcup_{1 \leq i \leq n} var(\tau_i)$$

Demuestra que var es una función y diga explicitamente quien es el dominio y contradominio de var.

1.5 pts. Para $\varphi \in \mathbf{FRM}_\rho$ definimos de manera recursiva el conjunto de variables de φ de la siguiente manera.

$$Var(\tau_1 \approx \tau_2) := var(\tau_1) \cup var(\tau_2)$$
$$Var(R(\tau_1, ..., \tau_n)) := \bigcup_{1 \leq i \leq n} var(\tau_i)$$
$$Var(\neg\alpha) := Var(\alpha)$$
$$Var(\alpha \to \beta) := Var(\alpha) \cup Var(\beta)$$
$$Var(\forall v_i \alpha) := Var(\alpha) \cup \{v_i\}$$

Demuestra que Var es una función y diga explicitamente quien es el dominio y contradominio de Var.

1.5 pts. Da una definición formal y recursiva, como en los incisos anteriores, del siguiente concepto. Sea φ una f.b.f de $\mathscr{L}$ y τ un término de $\mathscr{L}$, τ es libre para v_i en φ.

3. Cálculo de Predicados (semántico)

1.5 pts. Consideren la estructura $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, asignamos el tipo de semejanza $\rho = \{R\}$, donde R es una letra predicativa binaria. Determina cuales de los siguientes enunciados son verdaderos en la estructura $\mathfrak{N}$, de ser verdadero el enunciado demuestralo, de lo contrario da un contraejemplo (una asignación para la cual la estructura no satisface el enunciado).

a) $\forall x \forall y \forall z((R(z,x) \leftrightarrow R(z,y)) \rightarrow (x \approx y))$

b) $\exists x \forall y(\neg R(y,w))$

c) $\exists x \exists y \forall z(R(x,y) \& (\neg R(x,z) \vee \neg R(z,y)))$

2 pts. Considera la siguiente relación entre enunciados.
Sean $\alpha, \beta \in \mathscr{L}_\rho^0$ decimos que

$$\alpha \sim \beta \text{ sii } \models \alpha \leftrightarrow \beta$$

- Prueba que la relación es de equivalencia.

Sea $[\alpha] = \{\delta \in \mathscr{L}_\rho^0 : \delta \sim \alpha\}$, decimos que para cualesquiera $\beta, \gamma \in \mathscr{L}_\rho^0$

$$[\beta] \leq [\gamma] \text{ sii } \models \beta \rightarrow \gamma$$

- Prueba que dicho orden esta bien definido, es decir, no importa de los representantes. También prueba que es un orden parcial.